

# 2024 仰望盃全國科學 HomeRun 實作大賽

## 決賽作品說明書

隊伍名稱：星期一要交報告

---

作品名稱：環環相扣-陀螺環調控設計與運動力學特性探討

---

### 科學概念 1：造成小環上升的主要原因--摩擦力

摩擦力是指當兩物體互相接觸時，在接觸面會產生阻止物體運動的力，又分成三種摩擦力；通常受力物體在移動前，摩擦力會隨著施力大小而改變，稱作靜摩擦力，當物體恰好移動時，會有最大靜摩擦力，而移動之後所受的摩擦力又稱為動摩擦力。

本作品在實驗時，因為小環與大環之間的摩擦力會隨著轉動而有所改變。

$$\text{公式： } f_s = \mu_s N$$

### 科學概念 2：歐拉角

小環在環上運動時，不同於呼拉圈，有三個軸同時轉動，而呼拉圈只有一個轉軸並且在運動時只有一接觸點稱為1PC；小環在運動時則有雙接觸點稱2PC。而我們將小環的這三軸分別轉動之角度稱為歐拉角(Euler angle)。對於在三維空間裏的一個參考系，任何坐標系的取向，都可以用三個歐拉角來表現。本實驗選用的實驗室參考系，是靜止不動的。而坐標系則固定於剛體，隨著剛體的旋轉而旋轉(如圖 5)。當以 $e_1$ 做為中心軸旋轉時， $e_2$ 、 $e_3$ 所旋轉的角度為 $\phi$ ，當以 $e_2$ 做為中心軸旋轉時， $e_1$ 、 $e_3$ 所旋轉的角度為 $\theta$ ，當以 $e_3$ 做為中心軸旋轉時， $e_1$ 、 $e_2$ 所旋轉的角度為 $\phi$ 。

## 壹、發想動機

我們研究陀螺環已有半年，實驗時常會需要測量小環的轉速，由於之前都是使用運動攝影法，先將實驗影片錄下來，再用 Tracker 分析數據，過程中會花費大量的時間，而且人為的失誤率也較高，因此為了提高數據的精確度以及操作更簡便的部分，所以我們設計用 Arduino 來量測小環轉速。

陀螺環(如圖1)是由一個大環與六個小環組合而成，只要固定大環轉速，並給定小環一個初速，小環就會上升到一定的高度，並且不停的轉動；在之前的研究中，我們發現大環轉動的頻率與小環轉動頻率之間的關係成正比(如圖3)，也就是當大環轉越快的時候，小環轉速也會跟著提高。不過，由於我們在實驗過程中發現當小環在陀螺環上進行實驗時須考量許多複雜的控制變因，所以本作品利用鐵桿來簡化此實驗，以小環在鐵桿上的下落速度當作大環的上升速度，並透過不同的鐵桿傾斜角度來模擬小環位於大環上的不同位置。

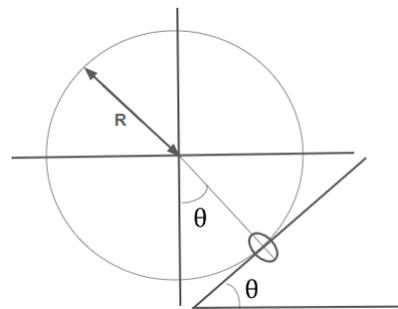
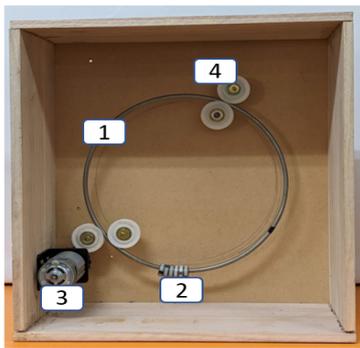


圖1 陀螺環裝置圖

圖2 直線鐵桿裝置圖

圖3 小環在大環上不同角度之示意圖

圖1中，1：大環，2：小環，3：大馬達，4：滑輪

圖2-1中，將小環在大環上的切線角度，類比於在鐵桿上的傾斜角度

本實驗我們希望研究的變因為探討鐵桿傾斜角對於小環轉速與下降速度的影響、小環在鐵桿上及陀螺環上有何區別。

- 一、鐵桿和圓環上不同傾斜角對小環轉速及下落速度之影響
- 二、小環在鐵桿上以及在陀螺環上的轉速與下落速度有何差別
- 三、分析鐵桿上小環轉動及近動之關係

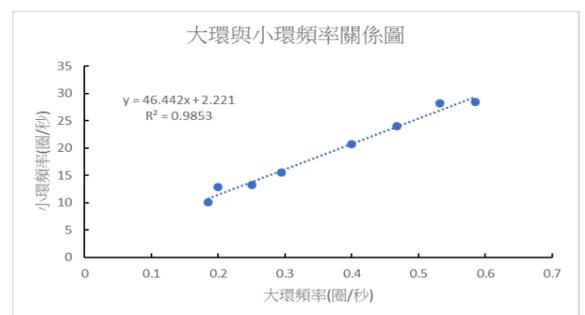


圖4 大環與小環頻率關係圖

依據圖3，當給定大環一固定頻率後，小環也會以穩定的頻率在大環上旋轉，兩者的比例約為46.4。

本實驗的最終目標是希望利用 Arduino 提高實驗的效率及精確性，並進一步並進一步建立起陀螺環的完整運動模型。

## 貳、作品創意性

本實驗在研究題目上選擇的是一種常見的教具，雖然常見，但在作為一個研究題目在台灣卻是十分罕見，更遑論是對陀螺環進行系統性的研究。

1. 通常使用陀螺環都只是用手轉大環(提供持續轉動的能量)，並拍打小環(提供初速)，而不是利用大馬達固定輸出轉速，再用小馬達，每次提供小環一樣的初速。
2. 在實驗中我們用了兩個 Arduino 的裝置，一個控制小馬達轉動，一個則是偵測小環轉動的資訊，輸出轉速。
3. 偵測小環轉動的 Arduino，我們採用的是紅外線接感器，透過兩個放置於上、下兩處的感應器來偵測小環的訊號並進一步得出小環的頻率與下降速度。

## 參、硬體及電路架構圖及實驗原理

當小環在鐵桿上旋轉時，小環的轉軸會因鐵桿給予的側向動摩擦力(與轉動方向相反)而改變方向，也就是所謂的進動現象，假設給予質量為 $M$ ，內徑為 $r$ 的小環一個初始的角速度 $\omega$ ，其向心力可用下列公式計算：

$$F_c = Mr\omega^2$$

此外，由於在本實驗中小環所受向心力為鐵桿給予的正向力，因此可求得最大靜摩擦力

$$f_s = \mu N = \mu Mr\omega^2$$

而當  $\mu Mr\omega^2 > Mg$  時

小環接觸點靜止不動，同時，小環的轉軸則因摩擦力造成的力矩而改變方向

$$K' = \frac{1}{4}M\omega^2(R^2 + r^2)$$

### 轉動與進動的關係

設小環在轉動時與鐵桿的接觸點為 $A$ ，其速度是利用進動的速度與小環自身的切線速度相加來計算。其中 $V$ 為接觸點 $A$ 的速率 (m/s)， $r$ 為小環內徑， $\omega_s$ 為小環旋轉速率。 $\omega_p$ 為小環進動速率。 $\phi$ 為小環質心到接觸點 $A$ 的向量與小環水平面的夾角。

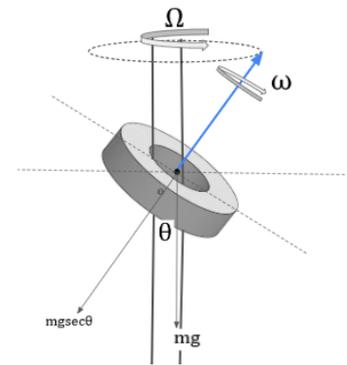


圖5 小環受力分析圖

$X$ 為小環質心到接觸點A的向量大小。 $a$ 為小環質心到接觸點A的向量在水平軸上投影向量的距離。 $\theta$ 為 $\omega_p$ 向量與 $\omega_s$ 向量的夾角。

因此，我們可推得：

$$V_A = a\omega_p - r\omega_s$$

其中

$$a = x\cos(\theta + \varphi)$$

$$x = r\sec(\theta)$$

將兩參數帶入後可得出：

$$V_A = x\cos(\theta + \varphi)\omega_p - r\omega_s$$

$$V_A = r\sec(\varphi)\cos(\theta + \varphi)\omega_p - r\omega_s$$

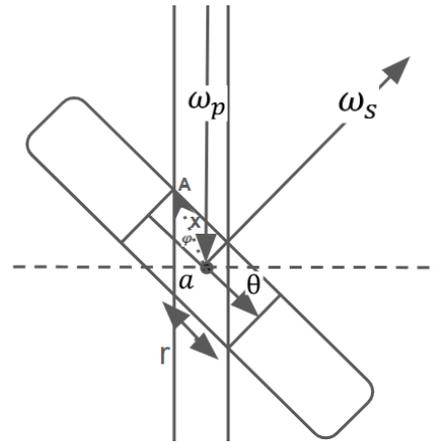


圖6 小環轉動分析圖

若忽略小環厚度，則 $\varphi$ 趨近於0， $\sec(\varphi)=1$ ，而當小環再桿上為滾動無相對滑動時 $V_A = 0$ 帶入上列兩式後，得出：

$$r\cos(\theta)\omega_p = r\omega_s$$

$$\omega_s = \cos(\theta)\omega_p$$

理論得出小環旋轉速率和進動速率的比值為小環傾角之餘弦值。

### 實驗裝置

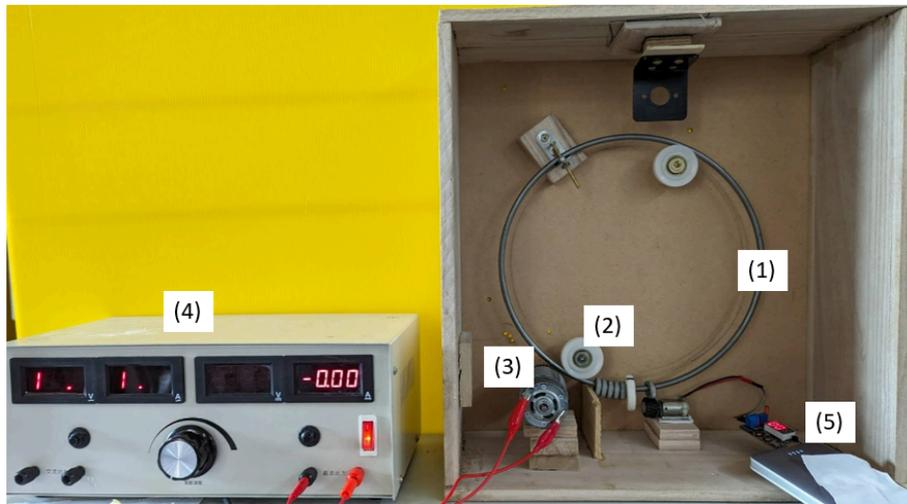


圖7 實驗裝置1

(1)陀螺環 (2)滑輪 (3)大馬達 (4)直流電源供應器 (5)可調式電壓接微型馬達

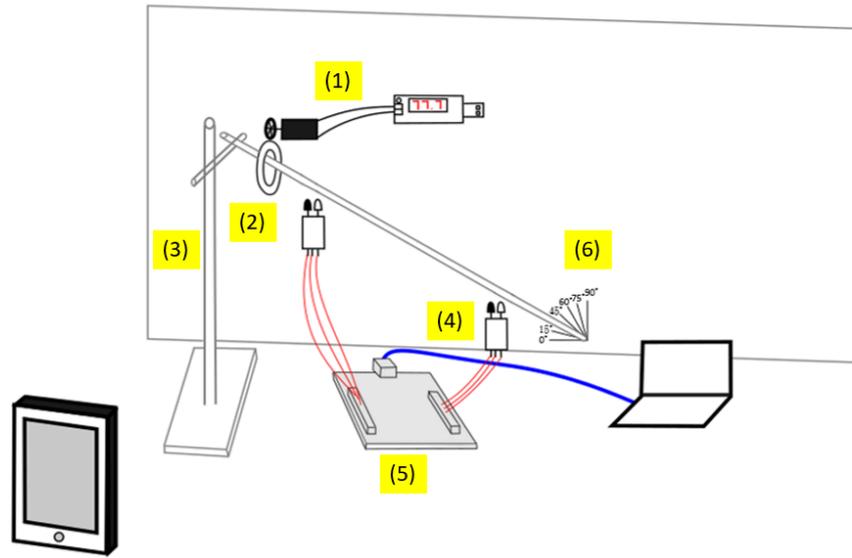


圖8 實驗裝置2

(1)可調式電壓接微型馬達 (2)自製小環 (3)鐵桿 (4)紅外線感測器 (5)Arduino面板 (6)角度

### 一、控制馬達轉速

本實驗利用馬達驅動器(L293D)並外加電源來控制直流馬達，驅動器根據 Arduino 的信號給馬達供電，提供小馬達的初速。

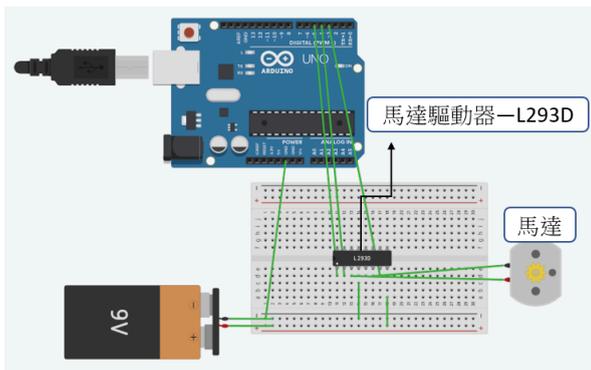


圖9 小馬達電路圖

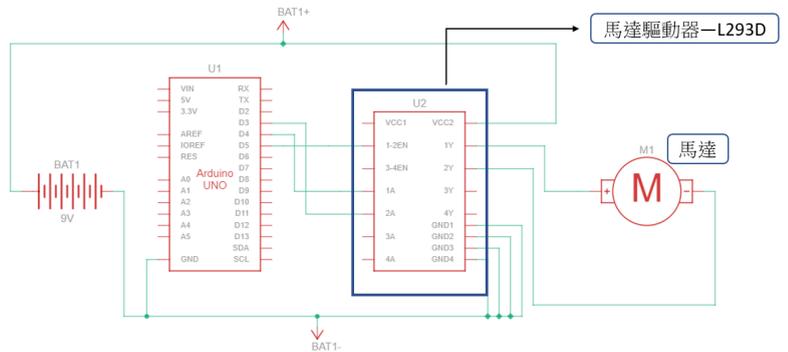


圖10 小馬達線路圖

### Arduino程式碼

```
const int ENA_PIN = 9; // the Arduino pin connected to the EN1 pin L298N
const int IN1_PIN = 6; // the Arduino pin connected to the IN1 pin L298N
const int IN2_PIN = 5; // the Arduino pin connected to the IN2 pin L298N

void setup() {
  pinMode(ENA_PIN, OUTPUT);
  pinMode(IN1_PIN, OUTPUT);
  pinMode(IN2_PIN, OUTPUT);
}
```

```

void loop() {
  digitalWrite(IN1_PIN, HIGH); // control motor A spins clockwise
  digitalWrite(IN2_PIN, LOW); // control motor A spins clockwise

  for (int speed = 0; speed <= 255; speed++) {
    analogWrite(ENA_PIN, speed); // control the speed
    delay(10);
  }

  delay(1000);

  // change direction
  digitalWrite(IN1_PIN, LOW); // control motor A spins anti-clockwise
  digitalWrite(IN2_PIN, HIGH); // control motor A spins anti-clockwise

  delay(1000); // rotate at maximum speed 1 seconds in in anti-clockwise direction

  for (int speed = 255; speed >= 0; speed--) {
    analogWrite(ENA_PIN, speed); // control the speed
    delay(10);
  }

  delay(1000); // stop motor 1 second
}

```

圖11 馬達驅動器 Arduino 程式說明

## 二、量測轉速

本實驗利用 Arduino 的和紅外線傳感器，具有一對紅外線發射與接收管，發射管發射出一定頻率的紅外線，當檢測方向遇到障礙物（反射面）時，紅外線反射回來被接收管接收，經過比較器電路處理之後，綠色指示燈會亮起。將感測器至於桿子上端，當期感到小環下落時，用程式time = millis()直到至於下方的皆感器感測到小環經過，時間計時。利用此方式來計算小環下落速度並與大環轉速做比較。利用此方式測量時間能得到更準確的數據。

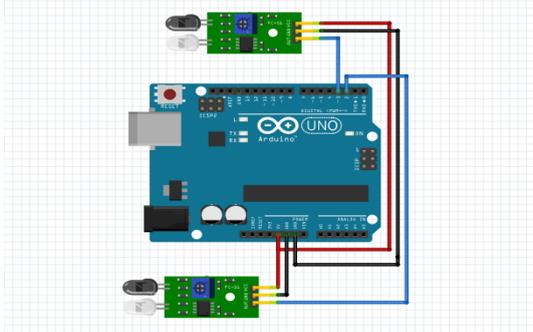


圖12 紅外線傳感器電路圖

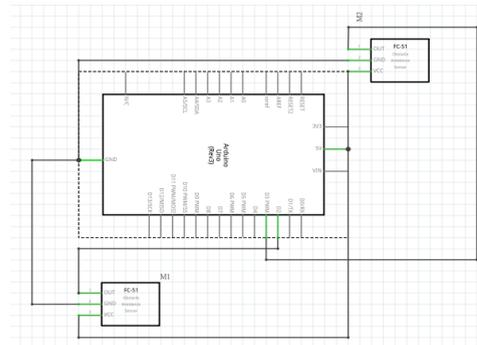


圖13 紅外線傳感器

```

int IR_Start = 9; // Pin connected to the IR sensor at the start of the platform
int IR_End = 10; // Pin connected to the IR sensor at the end of the platform
int LED = 13; // LED Pin

unsigned long startTime; // Variable to store the start time
unsigned long endTime; // Variable to store the end time

void setup() {
  Serial.begin(9600); // Initialize Serial
  pinMode(IR_Start, INPUT); // IR Start Sensor pin INPUT
  pinMode(IR_End, INPUT); // IR End Sensor pin INPUT
  pinMode(LED, OUTPUT); // LED Pin Output
}

```

```

void loop() {
  int startSensorStatus = digitalRead(IR_Start); // Read the start sensor
  int endSensorStatus = digitalRead(IR_End);    // Read the end sensor

  if (startSensorStatus == LOW) { // If ball blocks the start sensor
    digitalWrite(LED, HIGH);     // Turn on LED
    startTime = millis();        // Record start time
    Serial.println("Start Detected!"); // Print start detection message
  }
  else {
    digitalWrite(LED, LOW);      // Turn off LED
  }

  if (endSensorStatus == LOW) { // If ball blocks the end sensor
    endTime = millis();          // Record end time
    unsigned long elapsedTime = endTime - startTime; // Calculate elapsed time
    Serial.print("End Detected! Elapsed Time: "); // Print end detection and time message
    Serial.println(elapsedTime); // Print elapsed time
    delay(1000); // Delay for 1 second to avoid multiple detections
  }
}
}

```

圖14 紅外線傳感器 Arduino 程式說明

### 流程圖

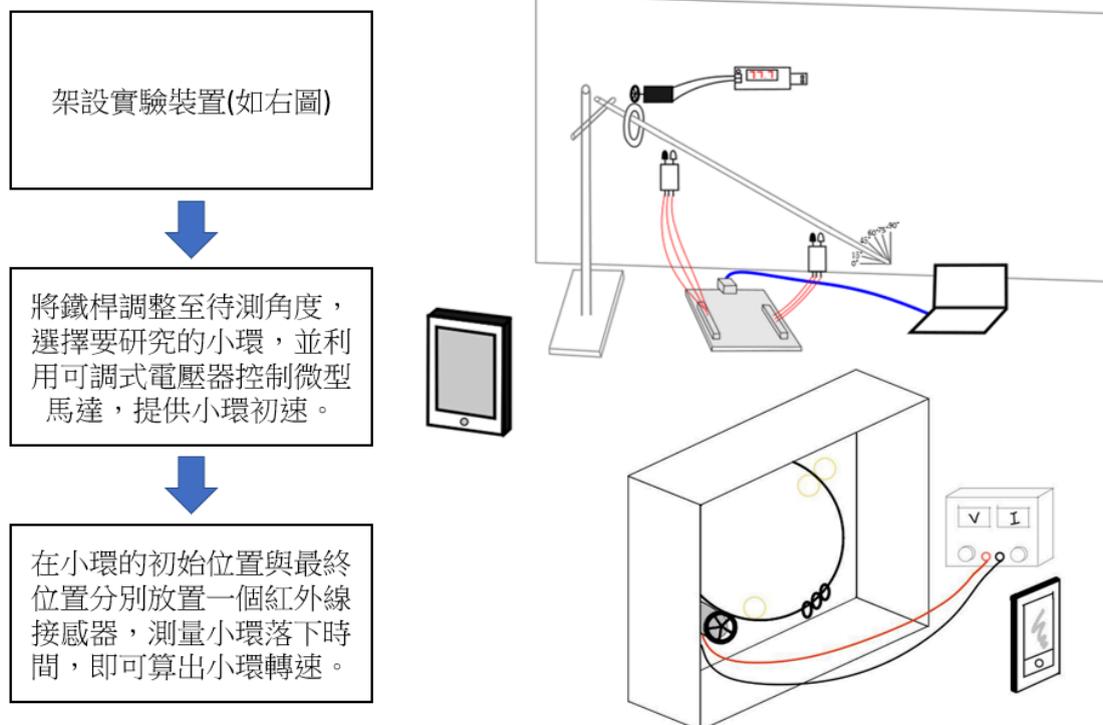


圖15 實驗流程圖

## 肆、作品成果說明

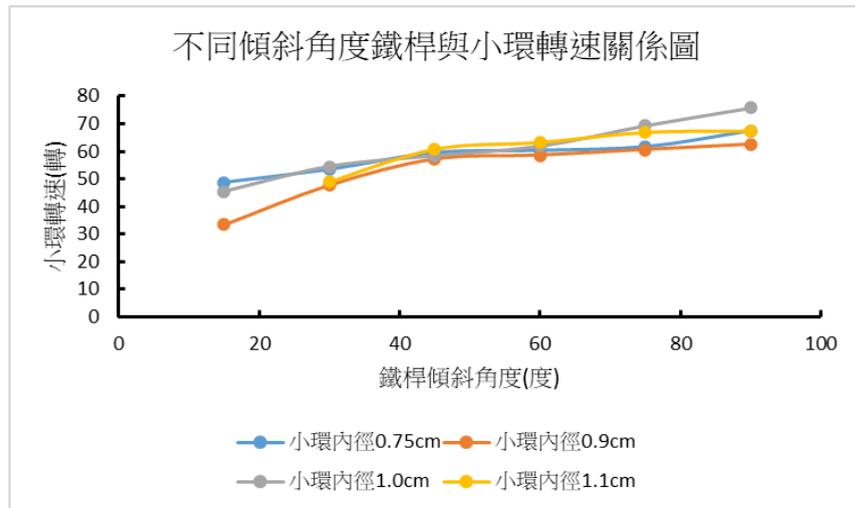


圖16 不同傾斜角度鐵桿與小環轉速關係圖

由圖16可知，當鐵桿傾斜角度增加時，小環的轉速也會隨之上升，且小環的半徑越大，其轉速也越大，我們推測這是由於半徑較大的小環所受的力矩較大，導致其轉速比較快，至於鐵桿傾角對於轉速的影響我們會在後面做進一步說明。

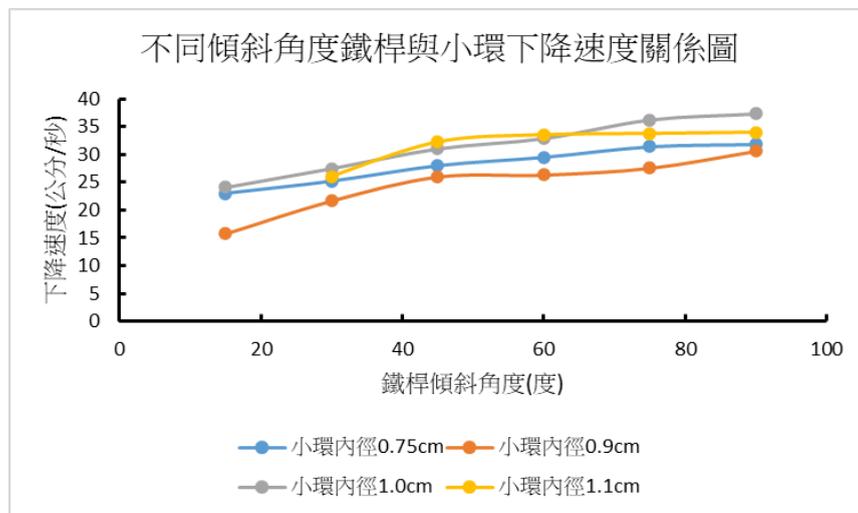


圖17 不同傾斜角度鐵桿與小環下降速度關係圖

由圖17可知，當鐵桿傾角上升時，小環的像降速度有隨之增加，這是由於小環所受的下滑力為 $mgsin$ ，其中為鐵桿傾角，當角度上升時，其下滑力上升，導致其下落速度增加，此外，根據圖8的結論可知小環半徑與小環轉速有關，又小環轉速會影響下落速度(詳見P9的說明)，因此可驗證圖9中下落速度與小環半徑呈正相關。

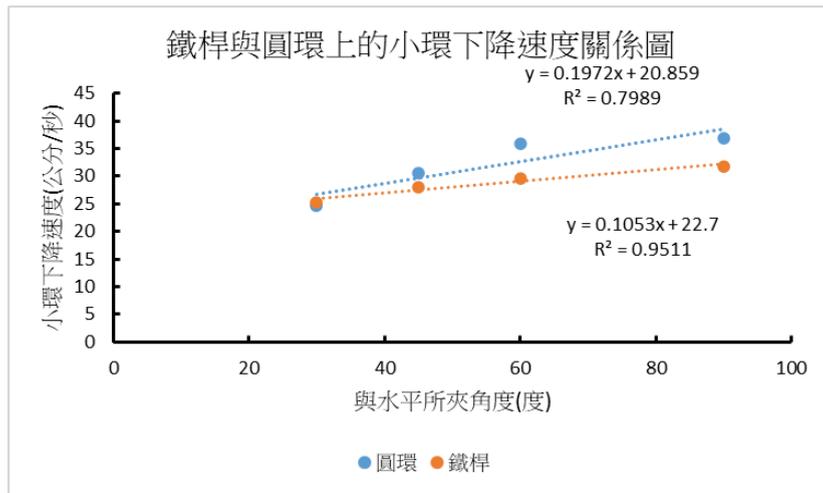


圖18 小環在鐵桿與圓環上的移動速度關係圖

由圖18可知，在鐵桿傾斜30、45、60度時小環的下落速度皆與圓環在同樣角度時維持小環位置所需的上升速度接近，故可證明小環在圓環上所需的頻率可類比到鐵桿上小環的下降速度。至於傾斜90度的下落速度雖然有數據差異，但我們推測這是小環在鐵桿開始進動的時間較晚所導致，因此不影響實驗結果。

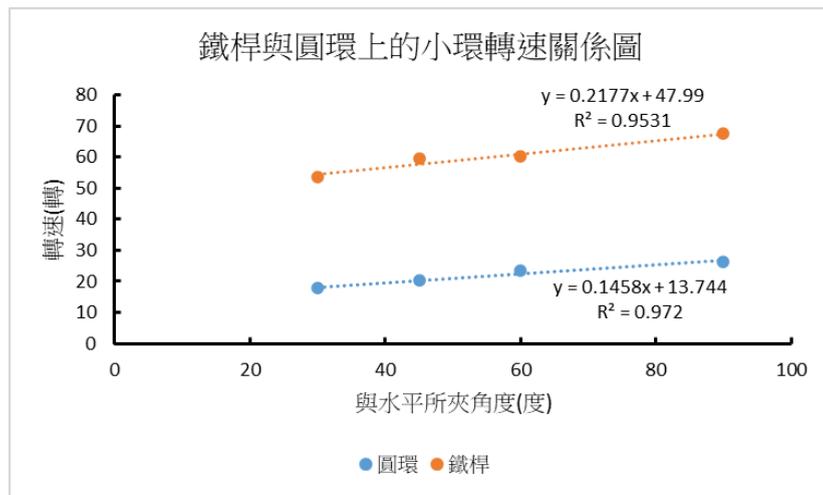


圖 19 小環在鐵桿與圓環上的轉速關係圖

由圖19可知，小環在鐵桿上與在大環上的轉速皆與其角度呈正相關，且兩者的斜率十分相近，雖然兩者截距有差，但我們推測這是由於兩者的厚度不同所導致。

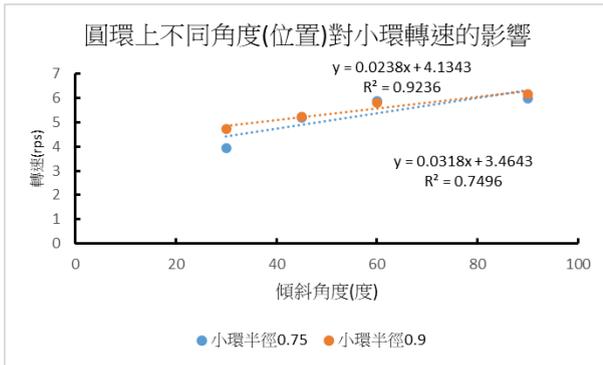


圖20 不同傾角的鐵桿對小環轉速的影響

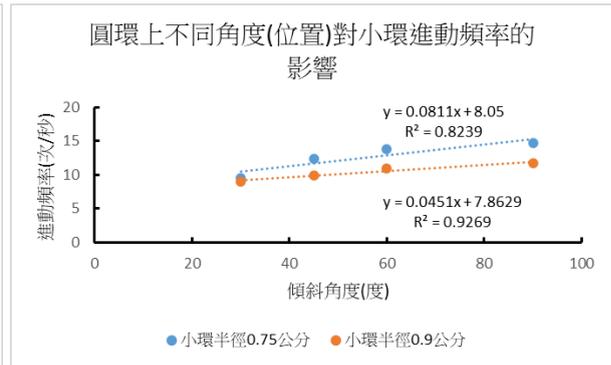


圖21 不同傾角的鐵桿對小環進動頻率的影響

藉由比對圖20、21可知，半徑較大的小環轉速相對較快，但是其進動頻率則是小於半徑較小的的小環。

此外，小環的轉速及進動週期皆與傾斜角度有關，兩者皆是隨著角度上升而增加，其中小環轉速與傾角的斜率(按半徑順序)分別為0.023(轉/度)及0.031(轉/度)，進動頻率與傾角的斜率為0.081(HZ/度)及0.045(HZ/度)。

綜上所述，我們發現當傾斜角度增加時，小環的轉速及進動頻率皆會增加，我們認為這是摩擦力給予小環的力矩所造成的，其中，在小環下落時受向上的靜摩擦力 $f_1$ 而產生側向的力矩 $\tau_1$ ，除此之外，小環也到受旋轉時鐵桿側面摩擦而有側向的動摩擦力 $f_2$ ，並造成一個向上的力矩 $\tau_2$ ，而 $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 正是造成進動的主因。

而轉速之所以受傾角影響是因為小環與鐵桿的接觸點所受的是靜摩擦力( $f_1$ )，其值相等於所受的外力，也就是 $mg\sin\theta$ ，換言之，當 $\sin\theta$ 值隨角度上升而增加時，靜摩擦力隨之增加，進而造成 $\tau_1$ 上升，使轉速增加。

而進動則是同時受 $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 影響，雖然 $\tau_2$ 為靜摩擦力造成，但由於 $\tau_1$ 的變動，造成進動頻率也隨著角度變化而改變。

此外，本作品所有實驗所提及的轉速都是在小環穩定轉動時測量的，因此小環的初始轉速對實驗的結果影響不大。

應用:

我們未來預計使用厚度更薄的小環來進行實驗，除了使大環與鐵桿上的數據更為接近之外，也希望能進一步探討接觸點的模式，屆時，Arduino除了可以運用在測量轉速上，相信也能幫助我們將進動的數據更加精進。

## 陸、參考文獻

Gyro-ring - California State University, FullertonC —

<https://studylib.net/doc/5895402/gyro-ring---california-state-university--fullerton>

Analyzing the Motion of a Washer on a Rod

<http://tinyurl.com/ytmh7scu>

a-Jitter-ring-and-gyro-ring-b-Rod-with-a-torus-shaped-ring-left-and-rod

<https://tinyl.io/A2VN>

陀螺環動力學分析

<https://tinyl.io/A2VQ>