NJ: Princeton University Press.
6. Halliday, Resnick, Walker. (2008) Fundamentals of Physics,8th ed.

神奇之焦點磁場

蔡玉良 劉家榮 蔡隆翔 黃鐘億 楊淳青

國立彰化師範大學　物理系

摘要：本論文探討圓錐曲線電流，對其焦點所造成磁場，具有神奇特殊現象。採必歐-沙 伐定律利用極坐標方法，可輕易推出此神奇理論公式並且進一步設計一些實驗加以驗證。本方法亦可輕易推出其他各形各色曲線(如心藏線、多重花辦線、…)電流之磁場， 其結果亦非常有趣。

關鍵詞：圓錐曲線、必歐-沙伐定律（Biot-Savart’s law）

壹、圓錐曲線

圓錐曲線爲圓錐與平面所截切出來之二維曲線，如圖 1 所示，以極坐標來表示其曲線最爲方便、統一，其數學試如下：

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (1)$$

其中 p 爲半正焦弦、e 爲離心率，而

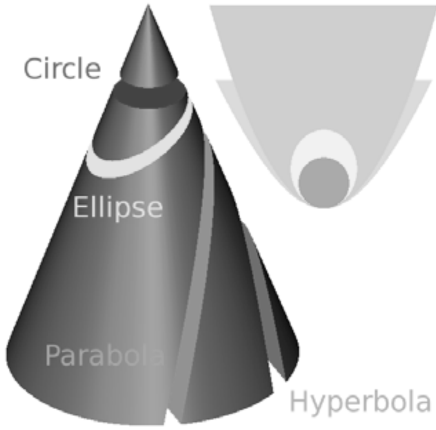

圖 1

e=0 曲線爲圓形、0<e<1 曲線爲橢圓、e=1 曲線爲拋物線、e>1 曲線爲雙曲線。

貳、必歐-沙伐定律利用極坐標之表象(觀測點與電流共面)

必歐-沙伐定律：

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{R}}{R^3} \quad , \qquad (2)$$

如圖 2a，$\vec{R}$ 爲電流源到所求位置的距離向量，若將所求位置定爲座標原點，且電流源上任一點的位置向量爲 $\vec{r}$，如圖 2b，則

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times(-\vec{r})}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{r}\times d\vec{\ell}}{r^3} \quad , \qquad (3)$$

且

$$d\vec{\ell}\times(-\vec{r})=\vec{r}\times d\vec{\ell}=(r\,\hat{r})\times\left(dr\,\hat{r}+rd\theta\,\hat{\theta}\right)=r^2d\theta\,\hat{k}$$

，則必歐-沙伐定律之極坐標的形式爲

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\theta}{r}\hat{k} \qquad (4)$$

即電流源與所求位置(原點)在同一平面上的磁場大小爲 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\theta}{r}$ (5)

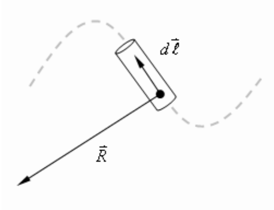

圖 2a

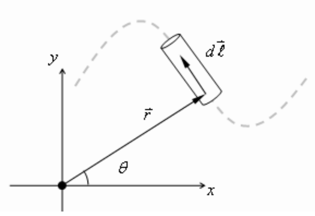

圖 2b

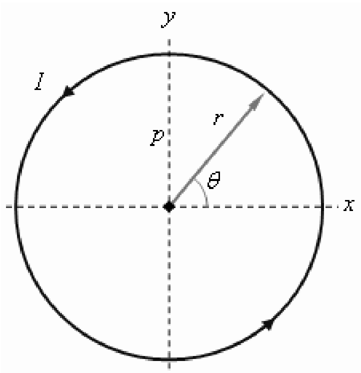

圖 3

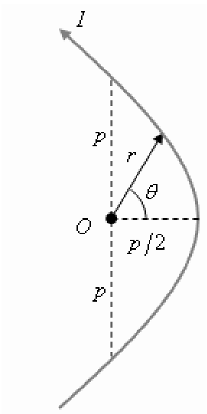

圖 4

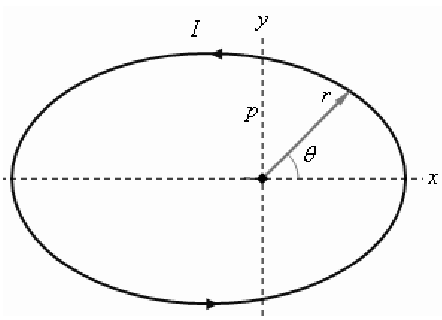

圖 5

參、理論推導

一、圓形電流(如圖 3)

$$r = p$$

$$\int \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{p}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2p} \tag{6}$$

二、拋物線電流(如圖 4)

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}$$

$$\int \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos\theta\right) d\theta = \frac{2\pi}{p}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2p} \tag{7}$$

三、橢圓線電流(如圖 5)

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad (0<e<1)$$

$$\int \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} (1+e\cos\theta) d\theta = \frac{2\pi}{p}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2p} \tag{8}$$

四、雙曲線電流(如圖 6)

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad (e>1)$$

$$\int \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} (1+e\cos\theta) d\theta = \frac{2\pi}{p}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2p} \tag{9}$$

另法：左雙曲線 $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ ，

$\alpha=\cos^{-1}(-e^{-1})$，

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi p}\int_0^{\alpha}(1+e\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi p}\left[\cos^{-1}(-e^{-1})+\sqrt{e^2-1}\right]$$ 。

右雙曲線 $r=\dfrac{-p}{1-e\cos\theta}$ ，$\beta=\cos^{-1}(e^{-1})$ ，

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi p}\int_0^{\beta}(1+e\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi p}\left[\cos^{-1}(e^{-1})-\sqrt{e^2-1}\right]$$

$B=B_1+B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2p}$ 結果與(9)式相同。

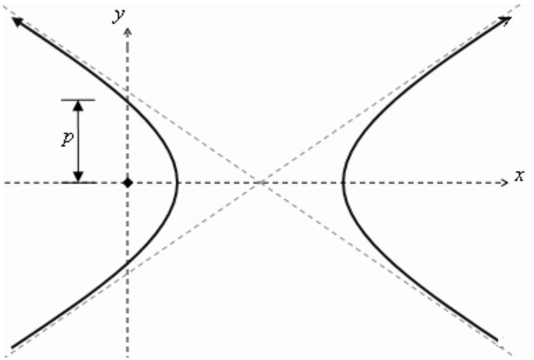

圖 6

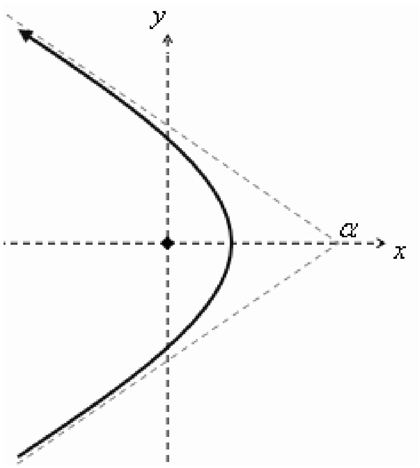

圖 7

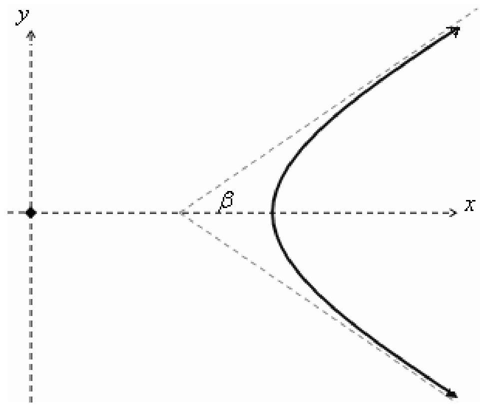

圖 8

綜合(6)~(9)式，我們的新發現：圓錐曲線電流(如圖 9)在焦點磁場的統一形式 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2p}$ ，由前面討論可得到一個結論：電流、半正焦弦相同的圓、橢圓、拋物線、雙曲線之圓錐曲線電流在焦點產生的磁場相同，與離心率無關!

肆、實驗驗證

一、實驗設備及儀器：

橢圓形模版 2 塊(橢圓 1 -p=7.2cm，e=0.6、橢圓 2- p=4.8cm，e=0.6)、圓形模版 2

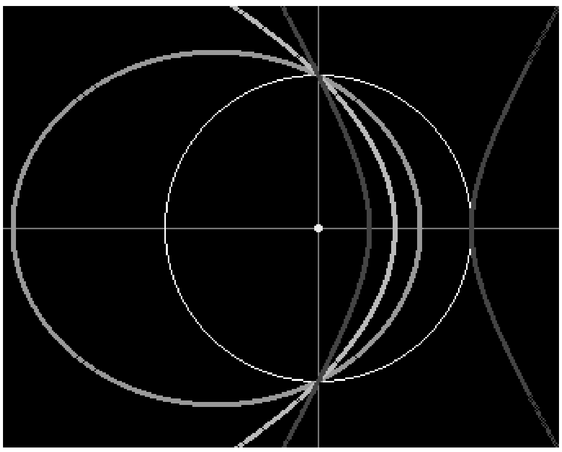

圖 9

塊(圓 1- p=7.2cm、圓 2- p=4.8cm)、漆包線、可變電阻、有角度刻度指南針、數位電錶、水平儀、電源供應器

二、實驗步驟：

1. 我們先用漆包線繞行模版 50 圈，其他模版亦是如此。(如圖 10)
2. 之後留下兩個線頭，並用砂紙將線頭的漆磨去。(如圖 11)
3. 將模版垂直平放於桌面，並將指南針放入模版焦點中心的位置。(如圖 12)
4. 再用水平儀，觀察指南針是否水平。
5. 使指南針的指針指向北方。(如圖 13)
6. 將兩端的線頭接上電池與可變電阻，調整適當指南針上偏轉角度。
7. 觀察通電之後，固定電流值，並紀錄指南針偏轉角度。(如圖 14)

圖 12

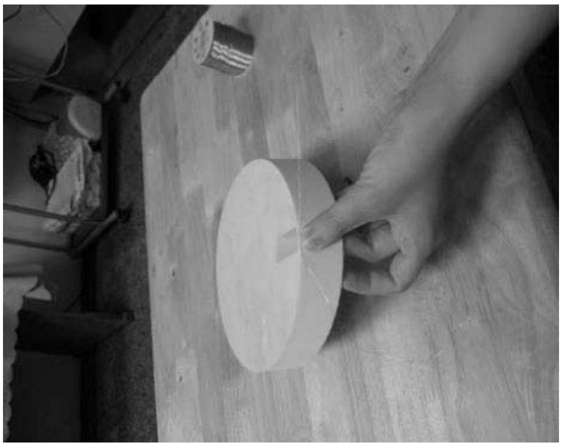

圖 10

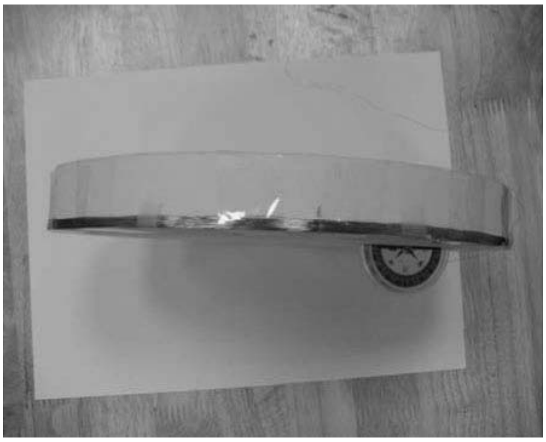

圖 13

圖 11

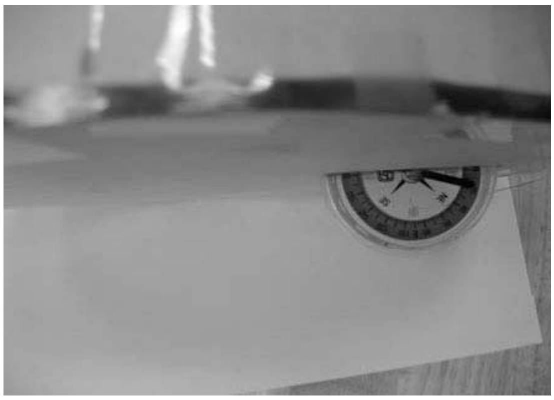

圖 14

8.依序將其他模版按步驟操作，並紀錄之。

三、實驗結果：

因爲電流所產生的磁場(B_i)恰與地磁(B_e)垂直，因此 $\tan\theta = \dfrac{B_i}{B_e}$ ，

在固定電流 I、固定半正焦弦 p 條件下，不同模版其指南針偏轉角度θ 幾乎不變，符合我們之理論推導。我們由實驗與理論順便推導出彰化地區的地磁約爲 3.64×10^{-5}(T)。

伍、其他二維曲線電流

由於篇幅有限，我們列出花瓣線電流中心點之磁場計算，花瓣曲線如圖 15，$r = a + b\cos(n\theta)$ （$a > b$）(n 爲花瓣數最大距離 $a+b$、最小距離 $a-b$)中心點磁場：

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a + b\cos(n\theta)} = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

結果：中心點之磁場與花瓣數目無關

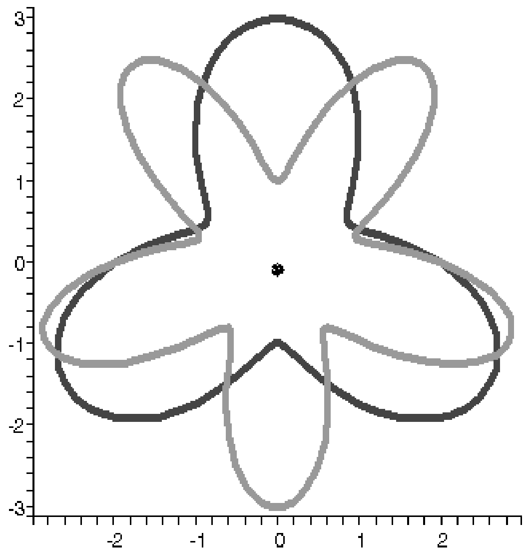

圖 15

陸、結論

圓錐曲線電流在焦點產生的磁場強度有神奇、統一的公式，其強度與半正焦弦長成反比而與離心率無關(如圖八所示)，並且進一步設計一些實驗加以驗證。由這些結論可以發現，若我們採取傳統的直角座標方式求解必歐沙伐定律的問題，勢必會遇到複雜的積分轉換的問題，但若採取極座標來解決必歐沙伐定律即可以得到簡單且漂亮的結果。我們知道特殊導線的磁場在物理學上是相當重要的，本方法亦可輕易推出其他各形各色曲線(如心藏線、多重花辨線、…)電流之磁場，其結果亦非常有趣。本篇論文提供一個方便、便利的方法。對於學習必歐-沙伐定律的高中生、大學生、初學者、或老師教學上有相當大的助益。

參考文獻

1. H. D. Young & R. A. Freedman, *University Physics*, 12th ed., Pearson (2008).
2. S. T. Thornton, J. B. Marion Classical Dynamics of Particles and Systems, 5th ed. Brooks (2008).