

由流體力學之觀點看作用在飛行棒球上的力

李中傑

真理大學 通識教育中心

(投稿日期：民國 100 年 01 月 12 日，修訂日期：100 年 06 月 30 日，接受日期：100 年 07 月 01 日)

摘要：棒球場上除了令人熱血奔騰的球場張力外，還隱藏了許多的物理原理可供科學愛好者品嚐探索。本文即要以看似平凡的棒球為議題，來看其間所包含的物理問題。雖然古典力學告訴我們：若知道一物體所受到的力與此物體運動的起始條件，理論上我們就可求得此物體的運動軌跡。但對一個飛行的棒球，除了重力之外，其所受到的力並不是可被清楚地寫下。本論文的前半部，作者將以流體力學的觀點去說明棒球飛行時所受到的氣動力—空氣阻力與馬格納斯力，並探究這些力的來源。而論文的後半部，則是以較務實的方法去探討空氣阻力與馬格納斯力的數學形式及大小。並在最後針對一個球場上廣為流傳的經驗探討「快速上飄球」的可能性。

關鍵詞：棒球、流體力學、空氣阻力、馬格納斯力。

壹、前言

在古典力學的體系中，當我們知道一物體所受到的所有力，以及此物體運動的起始條件後，理論上我們就可求得此物體的運動軌跡。即便實際上的運動方程式不見得可解，我們仍舊常將之歸為數學上的難題。古典力學，感覺上就是一門單純乾淨的學科。然而，處理古典力學問題的真正難處卻是來自於我們無法清楚得知物體到底受到了哪些力？就以飛行的棒球為例，除了重力之外，或許還有不少人可說出空氣阻力(drag)，與因

棒球自旋而產生的馬格納斯力(Magnus force)。但它們為何產生？以及如何以數學形式來表示它們？可能就不是那麼清楚了。而為回答這些問題，我們就得回到流體力學的層面，去看棒球飛行時如何與其周遭的氣流作用。

本文的目的便是要以流體力學的觀點去說明棒球飛行時，除重力外，其所受到的氣動力—空氣阻力與馬格納斯力之來源。並介紹當今學界對棒球飛行時所受到之力的研究成果，同時也提供讀者一個接觸流體力學的題材。

本文的架構如下：首先我們會以棒球實際可飛行的距離，指出空氣阻力在我們日常生活中是影響物體飛行距離不可忽視的因素；接著在第三節中，我們會以流體力學的觀點去解釋空氣阻力與馬格納斯力的來源，並於第四節中給出這兩個力的數學表示式；第五節與第六節則是當今學界對這兩個力的大小之測量結果；在知道棒球飛行時所受到的力大小後，我們就以這些知識於第七節中來回答一個棒球場上常被提及的老問題—快速球真的會上飄嗎？最後的第八節則是本文的結論。

貳、空氣阻力並不小

在伽利略的《兩門新科學》中有一段這樣的情節。化身伽利略本人的薩耳維亞蒂對著代表亞里斯多德學派的辛普里修說：

「你該問為什麼一顆沙粒與一樽石磨會同樣快地下落？然而，辛普里修，我不希望你像別人一般曲解我的議論，撇開主題而僅挑剔我言論中無關緊要的部分，並將一些絲毫小錯藏匿在如船錨之大的錯誤中。亞里斯多德說：「一百磅重的鐵球從一百腕尺的高處落下，當其落地時一磅重的鐵球僅能下落一腕尺。」而我要說它們同時落地！根據實驗，你們發現大球比小球超前兩腕尺。現在你該不會用這兩腕尺來掩飾亞里斯多德的九十九腕尺吧？或只提及我的小錯誤而避談亞里斯多德的大錯。」(伽利略,1638)

姑且不論伽利略在比薩斜塔上是否真做過傳說中的自由落體實驗，或是以什麼樣的實驗來支持他的上述論點。我們不難發現，在薩耳維亞蒂的這段話中已透露出現代物理學的一個要素—實驗的精神。然而就在同一句話中，薩耳維亞蒂也點出在真實的實

驗環境中，實驗結果無可避免地參雜著眾多因素所造成的實驗誤差。也就是說，實驗結果往往無法直接完美地呈現出自然的法則。但也是因為有這樣的難處，更加突顯出伽利略的睿智—推論中知道何時該跳過實驗缺失所造成的假象，而能直接觸及物理定律的核心。在伽利略對自由落體的討論中，我們跳過了空氣阻力的影響！然而在我們日常生活中的運動，空氣阻力真可忽略不計嗎？

日常生活的經驗往往會形塑我們對自然的認知。當我們游泳時，毫無疑問地我們可感受到水對我們所造成的阻力。但在無風路面上的行走或跑步，由於我們已太習慣於這樣的運動狀態，對其所伴隨出現的空氣阻力也就不以為意。至少與水中的阻力相比，空氣阻力是小的。此外在學校的物理課程中，絕大部分有關物體運動的問題範例也是考慮在理想狀態之下，甚至還特別標註空氣阻力可忽略不計。即便是到了物理系的大二力學，雖會提及空氣阻力的影響，但卻顯少以貼近我們周遭的經驗，去探討一般物體於真實運動中所會遇見的空氣阻力。如此的簡化問題無形地讓人覺得空氣阻力的影響或許真的可忽略不計。那麼下面我們就以一個棒球場上的例子，來重新評估空氣阻力對物體運動的影響。

考慮一位打擊者在本壘上方高度一公尺處將球以 44.44m/sec ($\approx 100\text{mph}$) 的初速正面擊出。若擊球仰角正確，經測量可知此初速度大致可讓打者擊出全壘打。同時為了簡化問題，我們先不考慮球被擊出後的自旋影響。假若空氣阻力真的可忽略不計，我們不難求得此棒球以約 45° 的仰角被擊出後可飛行最遠(由於打者是在高度一公尺處將球擊出，所以此仰角並非精確地在 45° ，但精確的仰角在我們下面的討論並不重要)。在此初始條件下，這棒球將可約略飛行

203 m (≈ 675 ft)。明顯地，這樣的飛行距離是任何人都不曾看過的超級大號全壘打。就以一般棒球場上全壘打的最遠距離來估算，大約120 m (≈ 400 ft)來說，此飛行距離遠了將近一倍之多，這暗示我們在棒球的飛行中，空氣阻力的影響是不可忽略不計的。

參、作用在飛行棒球上之力的來源

既然空氣阻力的影響不可忽略，那我們便想去探究這空氣阻力該有多大？又為何會有這樣的空氣阻力產生？

為回答空氣阻力是如何地產生？我們就必須將棒球的飛行視為是一物體(棒球)在流體(空氣)中的運動。自然地，棒球飛行時除了受到地球吸引的重力外，其它所有作用在棒球上的力都會來自於棒球與空氣流體間的交互作用。也因此探討棒球飛行的物理學時，流體力學的知識是不可或缺的。事實上，在牛頓的《自然哲學之數學原理》中的第二卷即是討論物體於阻滯介質中的運動。且在牛頓過世後的百年間，無論是白努力(Daniel Bernoulli, 1700~82)、達蘭博特(Jean le Rond d'Alembert, 1717~83)或是歐拉(Leonhard Euler, 1707~83)均以牛頓力學為出發點對流體力學做出重要的貢獻。除了較為一般人所聞的白努力定律之外，值得一提的是歐拉對流體所提出的見解。為了對流體建立起適當的數學模型，歐拉把流體視為是一群無限小的流體單元，緊鄰彼此的連續運動。再根據牛頓力學的第二定律與質量守恆原理，他開創了理論流體動力學中的重要里程碑—歐拉方程式(Euler's equation)，方程式中歐拉以流

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P \quad (3.1)$$

體之壓力(P)與速度(\vec{v})在空間位置上的變化量來描述流體之運動行爲，其中 ρ 為流體於此空間點上之密度。

雖然有了此研究理想流體行爲的方程式，但此歐拉方程式實為一組耦合的非線性偏微分方程式組(非線性項出現在方程式等號左邊的第二項)，因此即便在歐拉的模型中並沒有將真實流體之黏滯性(viscosity)考慮進來，但除了少數特殊的例子外，要對歐拉方程式求得一般解在當時是相當困難的。至於若要把真實流體所具有的黏滯性也考慮進來，則要等到納維(Claude-Louis Navier, 1785~1836)於1822年的工作。同樣的研究，斯托克斯(George Stokes, 1819~1903)在稍後的1845年也獨立完成。今天我們便把此兩人的工作結果統稱為納維-斯托克斯方程式(Navier-Stokes equation)：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \vec{f} \quad (3.2)$$

式中的 \mathbf{T} 為應力張量(stress tensor)； \vec{f} 為作用在單位體積流體上之力(body force)，像是重力等。

原則上此納維-斯托克斯方程式完全描述了古典流體的流動現象。也就是說對於棒球飛行的問題，我們可藉由此方程式去計算出球面上各點之壓力與剪應力(shear stress)(註：此處剪應力可視為棒球表面與空氣接觸面之磨擦力，其方向會是棒球球面之切面方向，如(圖1)所示)一但得知球面上各點的壓力與剪應力，透過對整顆棒球表面的面積分，則此飛行棒球因與空氣交互作用，而所受到的氣動力(aerodynamic force)也相應可被算得。(Landau & Lifshitz, 1989)

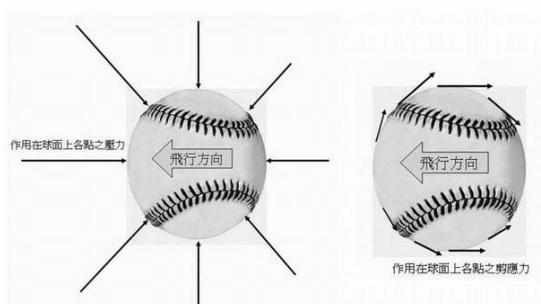


圖 1：棒球飛行時，其球面上所受到的壓力與剪應力。

但令人沮喪的是，以此直接的方式去對方程式求其解析解，到目前為止還無法完全達成。尤其是在處理球面上的剪應力時，無法以近似的方法來處理。不像在計算壓力一般，可將流體視為無黏滯性的理想流體，而必須直接面對流體黏滯性的存在，去對納維-斯托克斯方程式求解，這也是流體力學在理論分析上的困難所在。此數學上的困境在納維-斯托克斯方程式提出後持續了將近數十年之久。終於在 1905 年，普朗特(Ludwig Prandtl, 1875~1953)提出邊界層(boundary layer)的概念後有了新的發展(Anderson, 2005)。

普朗特認為流體黏滯性與物體所造成的阻力效應僅存於物體表面上一層很薄的區域內，此薄層就稱為邊界層。在此邊界層外的流體可被視為是理想流體，其黏滯性可被忽略不計。簡單地說，理論上我們可將棒球飛行的問題分為兩部分處理。一部分是在棒球表面上方邊界層外的區域，此區域的空氣可被視為理想的流體，因此可利用之前所提到的歐拉方程式來處理。即便求解上有其困難度，但這方面的處理技巧也已被眾人所研究發展了近兩百多年。至於問題的另一部份則是在邊界層內的區域，其狀態會受流體黏滯性及流體-物體間表面接觸所造成的阻力效應所影響。然而，我們應不難理解，邊界層

最外圍的邊界條件大致可決定於邊界層外的狀態。且由於邊界層的厚度相當的薄，因此一般認為它對邊界層外的流體狀態影響不大。除非當流體流經棒球表面時會有分離區域(separation region)的產生(圖 2)，此時分離區域內的流體會隨流體速度的增大由規則的渦漩(vortex)轉變成亂流(turbulence)的狀態。這樣的狀態改變就會有相當的程度來影響邊界層外的流體。反過來說，這也等同於改變了棒球所受到的氣動力。事實上，在棒球場上所看見的棒球飛行，其飛行速度絕大部分是會造成棒球後方分離區域的亂流出現。也正是這亂流的出現，讓我們直到今天還是很難以納維-斯托克斯方程式為出發點去處理棒球的飛行問題。因此在實作上，若要對棒球的飛行進行量化分析，我們還是得配合實驗上的結果來發展我們的理論。接下來我們就以風洞實驗的照片來做說明。

(圖 2) 風洞實驗的照片是由美國聖母大學的布朗教授(Prof. F.N.M. Brown)所拍攝(Briggs, 1959)。照片中的棒球以約 17.6m/sec (≈ 40 mph) 的速度向右飛行(在真實的風洞實驗中，棒球實際上是被固定在同一位置，而讓氣流向左流動)。除此之外，這

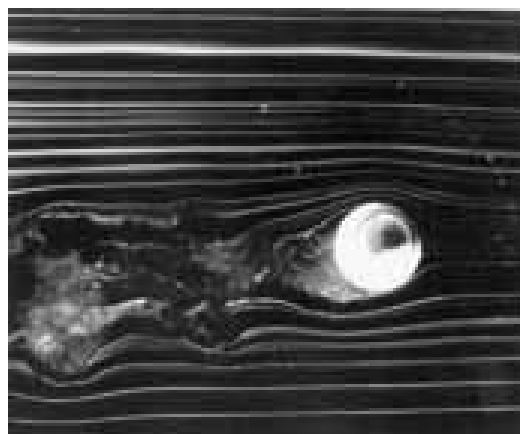


圖 2：風洞實驗中的棒球飛行。(此照片取自 Am.J.Phys.27, p589-596, 1959)

棒球還以每分鐘一千轉(1000 rpm)的逆旋速度自旋。就以此照片為例，這裡的逆旋(backspin)是指以穿過球心並垂直紙面朝外方向為軸的旋轉(右手規則)，在此照片中為逆時鐘的方向旋轉；相反地，若是正旋(topspin)的自旋在此照片中就會是順時鐘的方向。(對於正旋球與逆旋球的另一簡單看法：球的自旋造成球面頂部之運動方向與此球本身的運動方向一致，則稱為正旋(topspin)球，這也是英文使用 top 此字的原因；反之，若是球面底部之運動方向與此球之運動方向一致，則稱為逆旋(backspin)球。)

雖然風洞實驗無法做出我們想要的定量分析，但藉由視覺化的照片則可大大幫助我們對流體運動定性上的瞭解。照片中利用煙霧的效果，我們看見了氣流運動之流線。如我們之前所述，棒球的後端有一分離區域的出現。區域外是平順的氣流，區域內則是無從預測的亂流。值得注意的是由於此棒球的逆旋運動，棒球後端之分離區域會朝向左下方偏斜，此乃因為棒球的逆旋，造成球上方表面的運動方向與氣流之運動方向相同，結果是氣流之粘滯性讓氣流分子被棒球表面帶到較後端才分離出去；相反地，棒球下方表面的運動方向與氣流之運動方向相反，造成氣流分子會在棒球下方表面較前處即分離開。也就是說棒球的自旋會造成氣流於棒球上下方之分離點不對稱出現，此不對稱的程度會隨棒球的自旋速度加快而趨於明顯。不難料到，這就是變化球所需的側向力之來源。

讓我們再回到照片的本身，雖然我們看到了氣流的分離區域朝向左下方偏斜，但必須牢記於心的是此乃棒球對氣流的影響。因此根據牛頓的第三定律(作用力與反作用力定律)，此被偏斜的氣流也同時對棒球施與一個朝上的作用力。此外棒球後端亂流的流速會快於棒球前端的氣流速度，所造成的結果

是棒球後端的壓力較小。於是在棒球飛行時，棒球前後兩端會有一個壓力差出現，這也造成一個與棒球飛行方向相反的力出現。此氣動力會由壓力大的一邊指向壓力小的一邊(在我們的例子中，棒球向右飛行，而此力指向左邊)，此就是棒球飛行時所伴隨出現的空氣阻力之主要來源。又如此來源的阻力有時我們也稱之為壓力阻力(pressure drag)。至於棒球飛行時空氣阻力的另一次要來源，則是出自於流體之黏滯性，這點稍後我們會再多加說明。(Bloomfield, 2001)

當然了，自然界不會自動地將作用於棒球上的力分門別類。總地來說，棒球在飛行過程中與空氣分子的作用，使棒球受到一個氣動力的作用。在我們前面所示的照片中，此氣動力的方向指向上方。為便於進一步的分析，我們習慣上會將此氣動力分解成兩個獨立且互相垂直的力，如(圖 3)所示：一個是永遠與運動方向相反的空气阻力，以及一個與空氣阻力垂直的力，稱為馬格納斯力(Magnus force)，其明確的方向為 $\vec{\omega} \times \vec{v}$ 的方向($\vec{\omega}$ 為棒球的自旋角速度， \vec{v} 為棒球的飛行速度)。在許多文獻中，由於所討論的對象往往是飛機的飛行，因此常將此馬格納斯力簡稱為升力(lift)。但在棒球比賽中，若投手投出的球種具有正旋的特性(例如：曲球(curve ball))，則此力會有朝下的分力，如此若再稱此力為「升」力便有點不恰當。因此在本文中，我都以馬格納斯力稱之。

肆、作用在飛行棒球上之力的表示式

如(圖 3)所示，作用在球上的力計有：重力、空氣阻力與馬格納斯力。在知道這些力的來源後，接下來的問題便是想知道它們的大小為何？其中重力在棒球比賽中是固定不

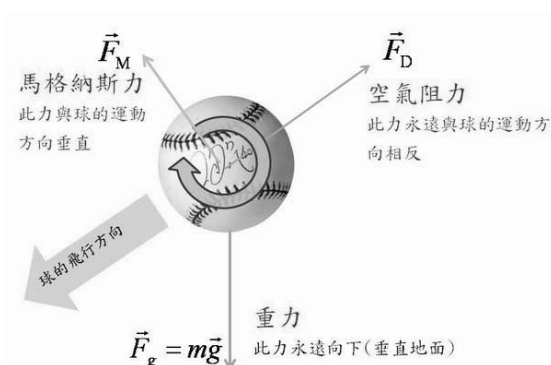


圖 3：作用在飛行棒球上的力

變的，大小為棒球之質量(m)乘上棒球場當地之重力加速度(\vec{g})，方向永遠朝下且幾近垂直地面。至於氣動力的大小(包括：空氣阻力與馬格納斯力)則不是那麼的直接，必須額外的說明。但在測量氣動力大小之前，我們想先知道氣動力的數學形式會是如何的表示？對此任務，流體力學的專家倒是利用了一個很簡單的分析法來達成任務，即「因次分析」(dimensional analysis)。此分析法要求方程式兩邊的物理量必須具備相同的單位因次(即物理單位要相同)。在此要求下，作用在棒球上的氣動力大小之數學形式必須為：

$$F_{\text{aero}} = \frac{1}{2} C_{\text{aero}} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2, \quad (4.1)$$

式中 ρ 為空氣密度、 A 為棒球之截面積(cross-section)、 v 為棒球之飛行速度、 C_{aero} 則是一個稱為氣動力係數(aerodynamic coefficient)的無因次常數，其確實之數值需要靠實驗來決定了。

同時根據「因次分析」中的白金漢 Pi 定理(The Buckingham Pi Theorem)，我們知道此氣動力係數會是一些無因次參數(dimensionless parameter)的函數。在我們棒球飛行的例子中，影響棒球氣動力係數大小的兩個主要無因次參數為：雷諾數(Reynolds

number, $Re \equiv \rho \cdot v \cdot l / \eta$) 與自旋參數(spin parameter, $S \equiv R\omega / v$)，即 $C_{\text{aero}} = C_{\text{aero}}(Re, S)$ 。其中定義無因次參數 Re 與 S 中的 η 為空氣之黏滯係數， ω 為棒球的自旋角速度，而 l 與 R 則分別為棒球的直徑與半徑。至於這些參數所代表的物理意義於本文稍後會有說明。(李中傑, 2011)

如前所述，習慣上我們會將(4.1)式的氣動力分為空氣阻力(\vec{F}_D)與馬格納斯力(\vec{F}_M)，兩個獨立且互相垂直的力來分析。即：

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \left(\frac{\vec{v}}{v} \right), \quad (4.2)$$

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} C_M \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{\omega} \right), \quad (4.3)$$

式中我們同時把力之方向給表示出來。此外，習慣上對這兩互相垂直之力，我們也付予其各自所屬的氣動力係數，像在(4.2)式中的 C_D 稱為阻力係數(drag coefficient)，而(4.3)式中的 C_M 則稱為馬格納斯係數(Magnus coefficient)。雖然此兩係數如同(4.1)式中的氣動力係數一般，會是雷諾數與自旋參數的函數，但此兩係數間並不必然就存有一特定的關係。事實上，在現有之實驗測量上我們也是將此兩力視為是彼此不相干的兩力，分別測量其各別所具有之係數。

由(4.2)與(4.3)的表示式可知，想要了解棒球飛行時所受到的力有多大，我們就得先知道阻力係數與馬格納斯力係數的大小。下面我們就分別對此兩係數的大小與相關問題做一說明。

伍、阻力係數的大小

棒球飛行時其所受到的阻力到底有多大？首先我們必須解決的問題是，棒球飛行時其阻力係數是多少？對此問題，氣動力學上的著名學者德瑞登博士(Huge Dryden)曾設計一個實驗讓棒球於風洞設備的正上方自由落下(無自旋)，同時風洞吹出的氣流以垂直向上的方向正面迎向掉落的棒球，調整風速發現當風速為42 m/sec (≈ 95 mph)時，此原本垂直落下的棒球會停留在空中不動。這告訴我們此棒球在實驗地點自由落下之終端速度(v_t)為42 m/sec。又此實驗中，棒球落下之終端速度是發生在重力與空氣阻力相等平衡後，即：

$$F = -mg + \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot A \cdot v_t^2 = 0, \quad (5.1)$$

代入適當的數值參數，如 $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ 、 20°C 平地之空氣密度 $\rho \approx 1.204 \text{ kg/m}^3$ 、棒球質量 $m \approx 0.145 \text{ kg}$ 與棒球截面積 $A \approx 4.281 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 。我們可得在此實驗中之阻力係數為 $C_D \approx 0.3$ 。(Briggs, 1959)

如此根據棒球自由落下的風洞實驗，我們得知 $C_D \approx 0.3$ 。但在棒球的實際飛行中，此係數可像一般古典力學教科書中的範例，把它視為是一個固定不變的常數嗎？(圖 4)是針對一個光滑球體(直徑為 l)於流體中飛行時，其阻力係數與雷諾數($\text{Re} \equiv \rho \cdot v \cdot l / \eta$)之實驗關係圖。雖然之前我們指出阻力係數會是雷諾數與自旋參數的函數($C_D = C_D(\text{Re}, S)$)，但在(圖 4)的實驗中，飛行的物體並沒有自旋的運動，因此其阻力係數只會與雷諾數相關。這與一般棒球的飛行狀況是不同的。但為求討論上的單純化，現階段我們就先不考慮棒球自旋對阻力係數的影響。

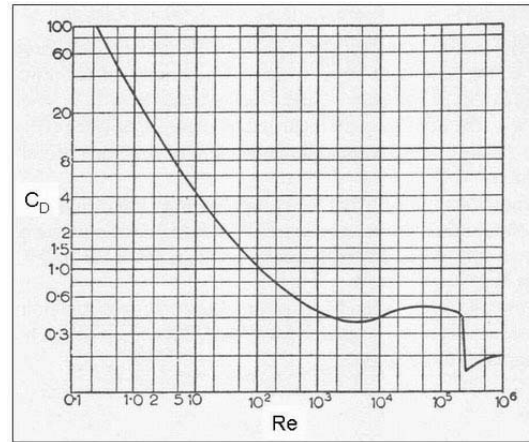


圖 4：阻力係數與雷諾數之關係。(此圖取自 Landau & Lifshitz 的 Fluid Mechanics.)

由(圖 4)我們看見阻力係數與雷諾數間的關係通則：當雷諾數很小時($\text{Re} < 10^2$)，阻力係數約略反比於物體之飛行速度，再配合(4.2)式阻力的數學表示式，我們可知此時的阻力會正比於物體之飛行速度。同時根據雷諾數的定義($\text{Re} \equiv \rho \cdot v \cdot l / \eta$)，此無因次參數可視為流體慣性力(inertial force, $\rho \cdot v$)與其黏滯力(viscous force, η/l)的比值。因此在此例子中，雷諾數很小即表示此流體的黏滯性是造成物體運動時阻力出現的主要原因，習慣上我們就將此類形的阻力稱為黏滯阻力(viscous drag)。而這也正是我們探討微小粒子懸浮於液體之布朗運動所採用的模型。

那在日常生活中，對一般巨觀可見的物體，只要其運動速度不要太快，其雷諾數的大小約略會在 $10^3 < \text{Re} < 10^5$ 之間(讀者可依雷諾數的定義驗證之)。此雷諾數的大小告訴我們，此時阻力的主要成因已由流體的慣性力所主載。於是在可忽略黏滯力之下，也暗示物體所受到的阻力主要是由物體表面所受的壓力差所造成。由(圖 4)所示，在此狀況下的阻力係數雖然仍舊會隨雷諾數的不同而有所微變異，但方便上我們還是可將它視為

一個定值來處理，這也是為什麼在一般教科書中常將阻力係數視為一定值的原因。

那棒球的飛行呢？一個強力投手可是有能力將球速飆到 42 m/sec (≈ 95 mph) 以上；一顆被擊出全壘打的飛球，其初速度也將近是在 44.4 m/sec (≈ 100 mph) 左右。就以速度為 44.4 m/sec (≈ 100 mph) 的棒球來說吧(直徑 $l \approx 7.4 \times 10^{-2}$ m)。在海平面高度 20°C 的環境中，其空氣密度與黏滯係數分別為 $\rho \approx 1.204 \text{ kg/m}^3$ 與 $\eta \approx 1.8 \times 10^{-5} \text{ nt} \cdot \text{sec/m}^2$ 。由這些數據我們可知此運動狀態下的雷諾數約略是 $Re \approx 2.2 \times 10^5$ 。將此數值對應到(圖 4)上，我們發現此時之阻力係數恰好處於明顯變小的區域左右，這也徒增了分析棒球飛行的困難度，不過也有可能因此讓棒球的飛行現象更加有趣，甚至對棒球場上的球員表現造成一些影響(Frohlich, 1984)。對此阻力係數突然驟降的現象，在流體力學中我們稱之為阻力危機(drag crisis)的出現。當我們加快流速直到其阻力係數開始驟降的速度，我們稱為臨界速度(critical velocity)。也是在此臨界速度上會造成層流(laminar flow)與亂流(turbulent flow)兩種不同流動型態間的相變，此議題也是當今流體力學界中熱門且困難的研究項目之一。

除此難題外，別忘了棒球表面上很特別的紅線(seam)。這兩百一十六針的縫線不僅將兩片分離的牛革皮合併成一個球體，其縫合處所造成的凸起也讓棒球表面有一獨特的粗糙形式，這與(圖 4)所探討的光滑球面並不相同。那這紅線會有什麼樣的影響呢？對此問題，截至目前為止也還沒有人可給出一個量化的明確答案，但我們還是可由其它類似的研究，來初探粗糙表面對阻力係數的影響。為明確定義球面的粗糙度，Achenbach 以類似高爾夫球表面的球體來研究此問題，

圓形狀的凸起均勻分布在球表面上，並引進一個定義球面粗糙度的無因次參數， ϵ/D ，其中 ϵ 為凸起之高度， D 為球體之直徑。實驗中球仍是保持無自旋的運動，其結果如(圖 5)所示。(Achenbach, 1977)

的確，阻力係數的大小會受到物體表面的粗糙度所影響。但與我們一般直覺猜測所不同的是，粗糙的表面可降低阻力危機出現的臨界雷諾數。(此處我們定義臨界雷諾數為阻力係數開始驟降的雷諾數。所以對相同的運動球體，較小的臨界雷諾數意味著較慢的臨界速度。)也就是說對一個粗糙物體的運動，在較慢的運動速度下就有可能出現阻力危機的現象，此時的阻力係數會變得很小。這也是為什麼當今的高爾夫球表面上會有均勻坑洞分布的原因，如此可降低阻力係數，讓球飛得更遠。

在(圖 5)中我們也發現粗糙的表面雖然可降低發生阻力危機的臨界速度，但其阻力係數變小的程度並不如光滑球面般的劇烈。又根據我們之前所做的評估，棒球飛行之雷諾數可高達 $Re \approx 2.2 \times 10^5$ 左右(對應之棒球飛行速度為 44.4 m/sec (≈ 100 mph))，此速度明顯會高於粗糙面下發生阻力危機的臨界

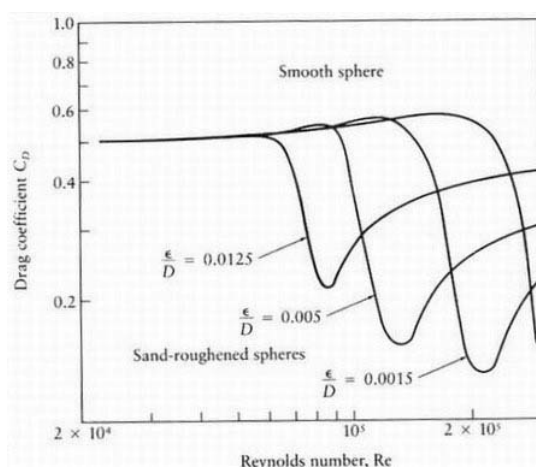


圖 5：球面粗糙度對阻力係數的影響。(此圖取自 J. Fluid Mechanics. 65, pp.113-125,1977)

速度，因此我們相信在真實的棒球飛行中，會有阻力危機的現象出現。值得一提的是，雖然現今大多數的學者都認為棒球的飛行當中，會發生阻力危機的現象。但讓棒球物理受到普遍重視的耶魯大學物理系教授 Robert K. Adair 卻獨排眾議，認為棒球的自旋會消滅掉此阻力危機的發生(Adair, 2002)。

雖然以真實的棒球來做實驗有其困難，像是棒球粗糙度的定義，或是紅線的方位、棒球自旋軸與棒球飛行方向的相對方位等等問題，都讓棒球物理的探討隱含著不準確性，但 Frohlich 對此棒球之阻力危機議題還是做了一些理論上的探討(Frohlich, 1984)。由於一般棒球飛行時的自旋速度可高達每分鐘上千轉，因此 Frohlich 認為棒球紅線的獨特凸起形式已不重要(不旋轉的蝴蝶球(knuckle ball)除外)，平均下的棒球表面可視為如前討論之均勻凸起之球體表面(此觀點明顯與 Adair 不同)。如此我們可定義棒球的粗糙度為其紅線的凸起高度($\epsilon \cong 0.5\text{mm}$)除以棒球之直徑，其值約略是 0.0068。對照於(圖 5)，我們估計棒球發生阻力危機之雷諾數會在 $Re \approx 1.5 \sim 2 \times 10^5$ 之間。但此估算與其阻力係數減小的程度則須進一步的驗證(Alaways, Mish, and Hubbard, 2001; Metha and Pallis, 2001)。同時 Frohlich 的假設也隱含著另一個未解答的問題。雖然 Frohlich 僅聚焦在阻力危機對棒球飛行上的影響，因此一開始便設定討論的對象為無自旋的棒球飛行。但為解決造成棒球表面不對稱粗糙的獨特紅線，Frohlich 卻是以棒球一般飛行時快速自旋的事實，來平均掉棒球紅線的獨特粗糙性。這也讓我們想知道棒球的自旋速度是否會對阻力係數的大小造成影響，這也是棒球物理學未來該回答的問題之一。

在本節的最後，值得一提的是，棒球迷應聽過投手的四縫線快速球會比二縫線快速

球來的快些。這現象也可由(圖 5)獲得一個合理的解釋。首先我們必需知道四縫線快速球是指投手握球的方式，使投出的球讓打者迎面看去(如果看得到的話)，以球的中心為準，球每旋轉一圈會有紅線跨過四次。如此，二縫線快速球便是球每旋轉一圈會有紅線跨過兩次。那針對棒球飛行的方向來說，四縫線的球是要比二縫線的球來的粗糙些(因為迎面所出現的紅線凸起較多)。再根據(圖 5)的結果，粗糙的表面會降低阻力危機出現的臨界速度，這造成四縫線快速球會有較小的阻力係數，也因此四縫線快速球的球速是要快一些。

陸、馬格納斯係數的大小

在介紹完棒球飛行時所受到的阻力之後，我們將討論轉移至馬格納斯力上。事實上，對一般的棒球迷來說，馬格納斯力，這個棒球飛行時所受到的側向力才是大家所關注的焦點。從早先對變化球是否真實存在的爭論，到變化球的側向偏移到底可有多大？或是投手球路的軌跡探討，都必須從對馬格納斯力的認識著手。雖然像是不旋轉的蝴蝶球，其飛行時所受到的側向力也可由棒球紅線所造成的球面不對稱來產生。但在大半的情況下，棒球飛行時的快速旋轉會消弭掉此紅線不對稱之影響，因此本節所討論的側向力均是指棒球自旋所產生的馬格納斯力。

同上節我們對空氣阻力的探討，要了解馬格納斯力的大小，等同於必須知道馬格納斯係數的大小。也正是因為眾多棒球迷對變化球議題的關注，歷年來已有不少的研究者設計實驗來測量此係數。其測量方法，早先較常利用風洞實驗來進行。但在風洞實驗中由於實驗控制上的難度，導致在球速與自旋速度上均無法同時與真實球場上的狀況互相

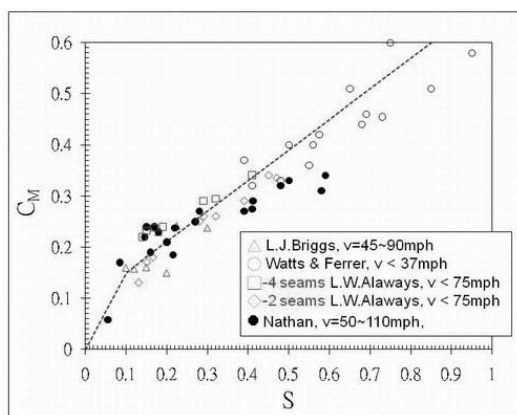


圖 6：馬格納斯係數與棒球自旋參數之關係。此圖的數據取自 Am.J.Phys.76(2), pp185-189, 2005。

匹配。另一方面，也由於現今高速攝影技術上的進步，現今對此馬格納斯係數的測量，大都改以對真實棒球飛行的軌跡攝影，再經分析求得。(圖 6)所整理的是一些較常被引用的實驗結果。

(圖 6)中最早的數據來自於 Briggs 的測量(圖中以△表示)(Briggs, 1959) 與 Sawicki 等人的分析(Sawicki, Hubbard, and Stronge, 2005)，實驗中 Briggs 讓旋轉的棒球在水平擺設的風洞中自由落下，然後量測此棒球因自旋運動所產生的橫向位移，由此再去反推此棒球所受到的側向力與其馬格納斯係數。實驗中的棒球速度調控在 20 ~ 40 m/sec (45 ~ 90 mph) 之間，自旋參數 $S = 0.1 \sim 0.3$ 。接下來，(圖 6)中的○所代表的是 Watts 與 Ferrer 的實驗結果(Watts & Ferrer, 1987)。Watts 與 Ferrer 的實驗同樣是將自旋的棒球置於風洞設備中，但對棒球所受到的側向力則是以應變計(strain gauge)直接測量。實驗中的棒球的自旋參數在 $S = 0.4 \sim 1.0$ 之間，但球速最高僅達 16.4 m/sec (37 mph)。此實驗結果顯示馬格納斯係數約略等於棒球的自旋參數 ($C_M \cong S$)，且與球速無關(即與雷諾數 Re 無

關)。至於(圖 6)中的□與◇則是 Alaways 的實驗結果(Alaways, 1998; Alaways & Hubbard, 2001)，實驗中 Alaways 利用多台高速高解析的攝影機對投手的球路實地拍攝，再分析其球路之自旋速度與軌跡。所分析的球速大致在 33.3 m/sec (75 mph) 左右，自旋參數則在 $S = 0.1 \sim 0.5$ 之間。有趣的是，對球速與自旋速度大致相同的兩顆球，圖中代表四縫線球路(□)的馬格納斯係數會略大於二縫線的球路(◇)。這說明了棒球場上投手的四縫線快速球(其自旋方向為逆旋的形式)，會受到較大的向上升力，因此球從投出到進本壘的路程中，其下降的程度會小於二縫線快速球。同時，四縫線快速球之飛行速度也比較快，球投出到本壘所花的時間也較短，這也是四縫線快速球下降較小的另一原因。最後在(圖 6)中，同樣利用快速攝影分析，Nathan 對投球機所投出的球作測量(Nathan, 2008)。Nathan 還特地調整投球機，使其所投出的球均為單一的二縫線球路，且球速與自旋參數分別在 22.2 ~ 48.9 m/sec (50 ~ 110 mph) 與 $S = 0.09 \sim 0.60$ 之間。其結果如(圖 6)中的●所示。此外，Nathan 還檢驗了在相同自旋參數下，馬格納斯係數與球速快慢是否有關聯性？雖然結果並不是全然否定其間可能存在的關聯，但根據 Nathan 的測量分析，發現其關聯性應該很小，即馬格納斯係數受球速快慢的影響不大。這也符合我們之前所提 Watts 與 Ferrer 的實驗結果。

雖然實驗上的測量，不免會受到實驗設備的限制、環境控制上的困難，以及實驗量測本身上的誤差。但比對(圖 6)中眾多實驗者對此馬格納斯係數的測量結果，現今我們對此係數也有一些概略上的認識。(圖 6)中我們也以虛線標示出當下在模擬計算棒球飛行軌跡時，針對馬格納斯係數與自旋參數間所常

用的函數關係(Sawicki, Hubbard, and Stronge, 2003), 即經驗公式:

$$C_M = \begin{cases} 1.5S & , S < 0.1 \\ 0.09 + 0.6S & , S > 0.1 \end{cases} \quad (6.1)$$

式中的自旋參數 $S \equiv R\omega/v$ 。有了此經驗公式後, 在下節中我們便以此公式為依據, 來探究一個球場上廣為流傳的經驗談—快速球會有上飄的路徑。

柒、快速球真的會上飄嗎?

我們都知道投手將球水平投出, 因無可避免地受到重力的作用而會下降許多。學過物理的讀者也都知道, 若將棒球的運動拆解成水平與垂直的兩個方向來看, 垂直方向就如同一個自由落體的運動。而當投手投出一快速球, 此球除了快速往本壘飛去外, 還會有一個逆旋的自旋運動。若把(圖 3)的運動方向調為水平方向, 不難看出此逆旋球會產生一個向上的馬格納斯力。為進一步地簡化問題的複雜度, 我們假設這位投手的投球姿勢是以完全下壓的方式將球投出, 如此球的自旋軸大致會與(圖 3)中的自旋軸一致, 也因此馬格納斯力與重力的方向相反。所以對如此投出的快速球, 其垂直下落的高度便會比不自旋的球來的少。但馬格納斯力的作用有可能讓一顆快速球不降反升嗎? 就如球場上常講的「快速上飄球」, 下面我們將檢視對此球路說法的正確性。

雖然重力的作用讓球水平投出後的飛行軌跡不會一直保持著水平飛行。但球從投出到進本壘的途中, 其飛行的水平速度會遠大於垂直方向的速度, 因此在我們的分析中可將此球的飛行速度視為水平來簡化我們的問題。於是在整個飛行過程中, 我們皆可將馬格納斯力的方向視為與重力相反。因此, 若

要讓此快速球於飛行過程中不降反升, 其條件便是要求馬格納斯力的大小必須大過重力的大小, 即 $F_M = (1/2)C_M\rho \cdot A \cdot v^2 > mg$ 。

一般來說, 對一位大聯盟的投手其快速球的自旋速度約略為每分鐘 1,200 轉 (1,200 rpm)。如此在(圖 7)中我們便以此自旋速度 (1,200 rpm) 來模擬馬格納斯力與球速間的關係。由於我們所關心的是馬格納斯力與重力的比較, 因此圖中的縱軸我們以其比值來呈現。結果我們發現馬格納斯力的確會因球速的增快而加大, 這會讓球下降的程度變小。但即便球速可高達 53.33m/sec (120 mph), 其 F_M/mg 的比值也約略為 0.66, 上升的馬格納斯力還是不敵重力的作用。況且一般投手的球速大約在 80 ~ 100 mph 之間, 其馬格納斯力的大小僅約是重力的一半左右, 因此在此轉速下不會有上飄球的出現。再說, 當今記錄上最快的快速球也僅飄到 46.67m/sec (105 mph), 仍不及我們前面所提的球速。(註: 此 105 mph 的快速球是由辛辛那提紅人隊的菜鳥投手 Aroldis Chapman 於 2010.09.24 所投出)

又根據馬格納斯力的公式(4.3)、馬格納斯係數 C_M (6.1) 與自旋參數的定義 ($S \equiv R\omega/v$), 我們也不難寫出馬格納斯力的大小與球速及自旋速度間的關係。(圖 8)中的實線表示馬格納斯力的大小等於重力時, 其球速與自旋速度間的搭配。結果顯示若要讓馬格納斯力等於重力大小, 則球速越慢, 其自旋速度就必須越大才行。圖中也告訴我們, 對一般投手的球速 80 ~ 100 mph 而言, 若要使馬格納斯力大於重力, 則其自旋速度必須高達每分鐘四、五千轉以上。這樣的轉速已遠遠超過我們人類在棒球場上所可達成的轉速極限。也因此我們可斷言, 對一個水平投出的快速球來說, 是不可能上有飄的軌跡出現。

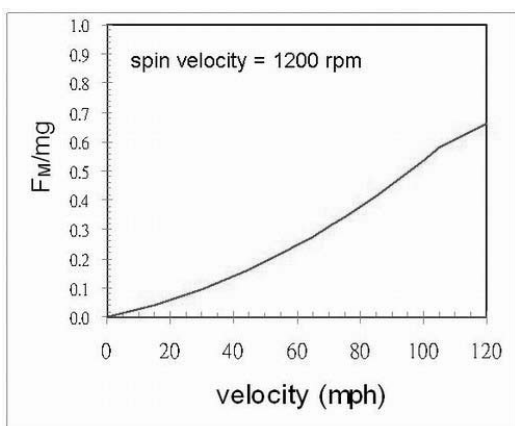


圖 7：馬格納斯力與球速的關係

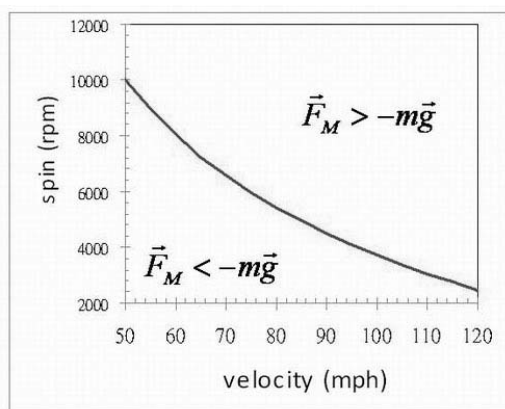


圖 8：馬格納斯力等於重力時，球速與自旋速度的關係。

那對一個稍微下壓的快速球(即拋射角度與水平方向夾一負的小角度， $-\varphi$)，其所受到的空氣阻力便會有一向上的分量，則此向上分量的空氣阻力配合之前所討論的馬格納斯力是否有可能大於重力，而使此快速球出現上飄的路徑？畢竟在本文的一開始，我們便已提及空氣阻力的大小是不可小看。事實上，我們不難計算出對一個大聯盟投手所投出的快速球，其空氣阻力的大小是可與重力之大小相互匹配。就以當今最快的球速 46.67m/sec (105mph) 來說，其空氣阻力與重力的比值可高達 $F_D/mg \approx 1.185$ 。但真實的球

場上我們仍需考慮到，投手所投出的球不宜在到達本壘前便已落地(即棒球迷口中的「挖地瓜」)，如此經過計算，此球與水平方向的夾角 φ 不可大於 3° 。也就是說空氣阻力所提供的向上之力分量不會大於 $F_D \sin(3^\circ) \approx 0.05 \times F_D$ ，其數量級已明顯小於重力的大小。這也告訴我們在投手將球投出的過程中，投手是沒有能力製造出一個向上且又大於重力大小的力，「上飄球」不可能出現！但對一個快速球來說，由於其馬格納斯力的方向大致會與重力的方向相反，因此在快速球的飛行過程中其垂直下降的程度會比其它球種來得小，而這較小的下降距離也就造成了「快速上飄球」的錯覺。畢竟對一位打擊者，這球路僅僅提供了 0.5 秒不到的判斷時間。

捌、結論

本文中我們以流體力學的觀點去說明棒球飛行時，除重力外，其所受到的氣動力—空氣阻力與馬格納斯力之來源。並介紹當今學界針對棒球飛行時所受到的力之研究成果。其中的重點在於對空氣阻力係數與馬格納斯係數的量測上。在空氣阻力係數方面，我們看見棒球飛行時潛藏出現阻力危機的可能性。這也回答了若要單以流體力學中的納維-斯拖克斯方程式去解決棒球飛行問題所將會遇見的困難，我們必須有能力解決流體中層流與亂流交界間的問題，而這一途徑也是日後很有價值的研究方向。

同時在本文中我們也指出，由於棒球表面上獨特的紅線，讓我們現今對棒球之空氣阻力係數的瞭解，也僅是知其大概的形貌。至於此空氣阻力係數的大小是否會受到自旋速度的影響則須進一步地去確認。反之，棒球飛行時之馬格納斯係數，現今的研究則有

較為一致的看法，雖然還是有些歧見的出現 (Adair, 2005)，但一般的研究者是普遍接受 (6.1)式的經驗公式，認為此式可適當地描述棒球飛行時所受到的馬格納斯力大小。

最後，誠如美國耶魯大學物理系的 Robert Adair 教授所說：「棒球中的物理並非是個可清楚定義的物理問題。相反地，棒球是屬於我們複雜世界中難以準確定義的物理範疇。物理學家僅能對一些不容易計算的物理量做成最好的判斷。」(Adair, 1995) 所以針對棒球飛行的問題來說，即便是作用其上的力我們仍無法百分百地確定其大小，但我們也確實可以本文所介紹的結果做為另一個研究的起點。實際去計算一個棒球飛行的軌跡，無論是利用數值的分析，或是解析上的處理。相信當我們越要去接近真實世界的棒球，而去放寬前題假設的同時，都會遇見不同的困難，而為解決困難所付出的學習，也正是本文介紹棒球場上物理學所要帶給讀者的物理思考。

誌謝

感謝國科會 NSC 98-2515-S-156-001 研究計畫補助，使本研究得以順利完成。

參考文獻

1. 伽利略(1638) (戈革 譯),《關於兩門新科學的對話》, 大塊文化, pp.78.
2. 李中傑 (2011), 白金漢 Pi 定理之應用與證明。(投稿審查中)
3. Achenbach, E. (1977), The effects of surface roughness and tunnel blockage on the flow past sphere, *Journal of Fluid Mechanics*. 65, pp.113-125.
4. Adair, R.K. (1995), The Physics of Baseball, *Physics Today*, 48(5), pp. 26.
5. Adair, R.K. (2002), 《The Physics of Baseball》(Third Edition), Harper-Collins Publishers. (此書的初版有中譯,《牛頓打棒球》(1993), 李靜宜 譯, 牛頓出版社。)
6. Adair, R. K. (2005), Comment on 'How to hit home run: Optimum baseball bat swing parameters for maximum range trajectories', *American Journal of Physics*, 73(2), pp.184-185.
7. Alaways, L.W. (1998), 《Aerodynamics of the curve ball: An investigation of the effects of angular velocity on baseball trajectories》, Ph.D. thesis, University of California, Davis.
8. Alaways, L. W., Mish, S. P., and Hubbard, M. (2001), Identification of release conditions and aerodynamic forces in pitched-baseball trajectories, *Journal of Applied biomechanics*.17, pp.63-76.
9. Alaways, L.W. and Hubbard, M. (2001), Experimental determination of baseball spin and lift, *Journal of Sports Science*, 19, pp.349-358.
10. Anderson Jr., J.D. (2005). Ludwig Prandtl's Boundary Layer, *Physics Today* 58(12), pp.42-48.
11. Bloomfield, L.A. (2001), 《How Things Work—The Physics of Everyday Life》(Second Edition), John Wiley & Sons, pp.156~163.
12. Briggs, L.J. (1959). Effect of spin and speed on the lateral deflection (curve) of a baseball and the Magnus effect for smooth sphere, *American Journal of Physics*, 27, pp.589-596.
13. Frohlich, C. (1984), Aerodynamic drag

- crisis and its possible effect on the flight of baseballs, *American Journal Physics*, 52(4), pp.325-334.
14. Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. (1989). 《 Fluid Mechanics 》 (2nd Edition), Pergamon Press.
 15. Metha, R.D. and Pallis, J.M. (2001), Sports ball aerodynamics: Effects of velocity, spin and surface roughness, in *Materials and Science in Sports*, edited by F.H. Froes and S.J. Haake (TMS, Warrendale, PA, 2001), pp.185-197.
 16. Nathan, A.M. (2008), The effect of spin on the flight of a baseball, *American Journal of Physics*, 76(2), pp.119-124.
 17. Sawicki, G.S., Hubbard, M. and Stronge, W. (2003), How to hit home run: Optimum baseball bat swing parameters for maximum range trajectories, *American Journal of Physics*, 71(11), pp.1152-1162.
 18. Sawicki, G.S., Hubbard, M., and Stronge, W. (2005), Reply to 'Comment on How to hit home run: Optimum baseball bat swing parameters for maximum range trajectories', *American Journal of Physics*, 73(2), pp.185-189.
 19. Watts, R.G. and Ferrer, R. (1987), The lateral force on a spinning sphere: Aerodynamics of a curve ball, *American Journal of Physics*, 55(1), pp.40-44.

Forces on a Flying Baseball from the Viewpoint of Fluid Dynamics : Where Are Those Forces Coming From ? and How large Are They ?

Chung-Chieh Lee
Aletheia University

Abstract

Besides our passion in a baseball game, if we are interested in science, we probably will know there are many physical issues in baseball. For example, we can calculate the trajectory of a flying baseball as we know its initial conditions and the forces on it. Unfortunately, even this simple problem we can hardly write down the forces, except gravity, on the flying baseball explicitly. Even if we know there are two other forces on a flying baseball, drag and Magnus force, but where are these forces coming from ? and how large are they ? In this paper, I will try to answer these questions from the viewpoint of fluid dynamics. And in the last part of this paper, I will discuss the possibility of “the hop of the fastball”.

Key words: baseball, fluid dynamics, drag, Magnus force.

