

質心運動演示教具

周鑑恆

萬能科技大學 光電工程系

(投稿日期：民國 100 年 02 月 01 日，修訂日期：100 年 05 月 03 日，接受日期：100 年 05 月 09 日)

摘要：嚴格而言，牛頓第二定律，原是單一質點運動時所遵守的規律，但在日常生活中和各種工程領域中面臨的課題，卻是有尺寸大小和形狀的物體之運動，而物體可視為由許多質點構成的質點系統，將牛頓第二運動定律應用於計算質點系統之運動，不難得出相當簡潔的結果。牛頓運動定律推導出的結果顯示，在地表附近拋出一個物體，這個物體當然受到重力，若忽略空氣阻力，即便此物體會翻轉，它質心運動的軌跡是一條簡單的拋物線。作者創作一項教具，可生動演示出這令人驚奇的現象。

關鍵詞：質心、拋物線、重力

壹、前言

牛頓三大運動定律是古典力學的基礎。所有日常生活上的物體、機械工程、航太工程、土木工程等各個工程領域的主題、自然界的蟲魚鳥獸、日月星辰、地震海嘯，都遵守牛頓三大運動定律。

嚴格而言：牛頓第二運動定律應用於質點，要進一步應用於有尺寸大小的物體（質點系統），必須略作計算。假設此質點系統中有 N 個質點，根據牛頓第二定律，某一個質量 m_i 的質點的運動方程式如下：

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

其中： \vec{F}_i 是此編號 i 的質點所受來自系統以外之外力， \vec{F}_{ij} 是編號 i 的質點所受來自系統以內其他質點（編號 j ）之力，當然，當 $i = j$ 時 $\vec{F}_{ij} = 0$ 。將 $i: 1 \rightarrow N$ 各個質點的運動方程式相加起來，就得到下式，

$$\sum \left\{ \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{ij} \right\} = \sum \vec{F}_i + \sum \sum \vec{F}_{ij} = \sum m_i \vec{a}_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

根據牛頓第三運動定律，不論 \vec{F}_{ij} 是什麼形式的力，也不論 \vec{F}_{ij} 如何隨時間變化，

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ，因此，將 $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$ 逐項寫出來，不難發現：

$$\sum_i^N \sum_j^N \vec{F}_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

此外，

$$\sum_j^N m_j \vec{a}_j = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i^N m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \left(\sum_i^N m_i \right) \vec{r}_{cm} \right\} = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{r}_{cm} = M \vec{a}_{cm} \quad \dots\dots\dots (4)$$

其中 $\sum_i^N m_i = M$ 為整個質點系統的總質量，依據質心的定義：

$$\sum_i^N m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_{cm} \quad \dots\dots\dots (5)$$

最後整理可得：

$$\vec{F}_i = \sum_i^N \vec{F}_i = M \vec{a}_{cm} \quad \dots\dots\dots (6)$$

亦即：

此物體（質點系統）所受的所有外力的向量和 F_i

＝此物體的總質量 $M \times$ 物體質心的加速度 a_{cm} 。

在地表均勻重力場 \vec{g} 下，

$$\vec{F}_i = M \vec{g} = M \vec{a}_{cm} \quad , \quad \text{則}$$

$$\vec{a}_{cm} = a_{cmx} \hat{i} + a_{cm y} \hat{j} = -g \hat{j} \Rightarrow a_{cmx} = 0; a_{cm y} = -g \quad \dots\dots\dots (7)$$

這結論表示：在地表附近扔出一個物體（質點系統），不論此物體的硬度、彈性，也不管這物體是否旋轉翻滾、爆炸，它的質心軌跡必為一拋物線。

也就是說：在地表均勻重力場中，忽略空氣阻力的條件下，撒出一把黃豆，這把黃豆的質心軌跡是一條拋物線；發射一顆煙火，則這顆煙火在爆炸之前和爆炸之後，它的質心軌跡都是一條拋物線；跳水選手從跳板上躍而下，翻騰扭轉之間，其質心軌跡

也是一條拋物線；芭蕾舞舞者舞姿曼妙，其質心軌跡還是一條拋物線；扔出一只保齡球瓶（榔頭、斧頭），這保齡球瓶（榔頭、斧頭）的質心軌跡仍是一條拋物線。

貳、研究動機

許多教科書⁽¹⁾和若干科普書籍⁽²⁾中都有提到這個簡單的結論，也提出許多例子（如上節所述）。然而這簡單的結論，卻鮮少有實驗儀器可以作演示，只能憑學生想像。雖然現在已有許多靜態的質心教（玩）具，例如：不倒翁、平衡鳥、還有一些結合視覺錯覺⁽³⁾的作品。但缺乏顯示在重力場下質心運動軌跡的動態教具。如果有顯示在重力場下質心運動軌跡的動態教具，一方面使這項令人難以置信的結果留給學習者深刻印象；另一方面，因為相關計算有些技巧，也有些曲折，實際驗證並眼見為憑，有助於建立以數學運算處理較深力學問題的信心。

參、創新之教具

本教具在物體質心加裝一發光小燈（見圖 1），在暗室中藉視覺顯示物體質心的軌跡，即可用來演示這奇特卻真實的力學現象。

所須的材料很簡單：AB 膠、焊錫、焊槍、電池（size AA）、電池盒含電線（大小配合電池）、白楊木、小白熾燈（電子材料行有售，約米粒大小）。

首先，用白楊木製作一個較為堅固的架子，長度約 25 cm，寬度約 18 cm，架子上要能安置一個電池盒，以及一個用木條安置在質心的小燈泡。

由於架子近似二維的結構，電池盒置於中間，質心位置大約在架子所在的平面上，所以只須用兩條鉛垂線，即可決定質心的位

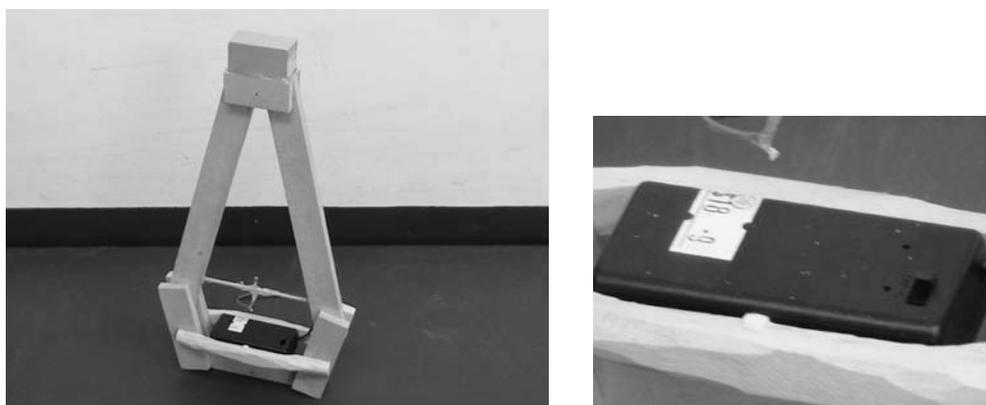


圖 1：白楊木製成堅固的架子。小燈泡安裝在質心，安置在架子上的電池盒（圖右）

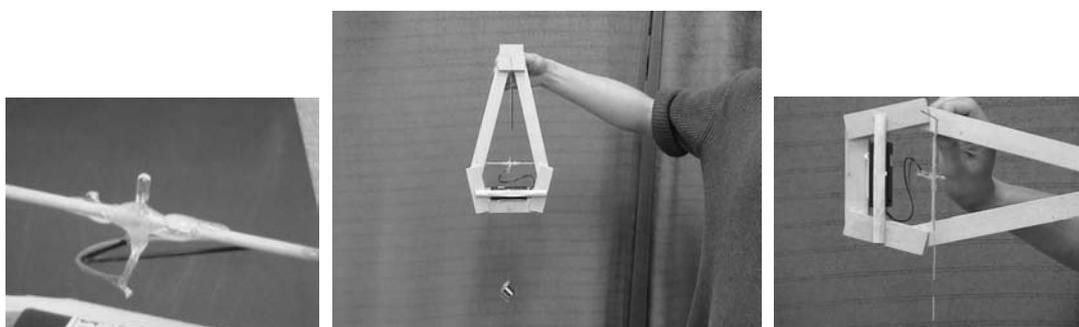


圖 2：用兩條鉛垂線（最右圖虛線所示）決定質心位置，質心位置決定之後，將小燈泡（圖左為燈泡特寫）牢牢安裝在質心位置。

置，質心位置決定之後，用 AB 膠將小燈泡牢牢安裝在質心的位置（見圖 2）。為了讓此物體在空中翻轉時，發光的小燈在各個角度看起來都一樣亮，所以採用白熾燈泡，而非較省電的 LED 燈。這個小燈只有米粒大小，並不容易摔破。

接通電池盒中的電池與小燈泡，使小燈泡發光（見圖 3）。發光的小燈泡即標示出這個物體的質心。

熄掉所有室內燈光，並防止陽光射入室內，在黑暗中拋出此教具，並使此教具轉動，利用視覺，可觀察到質心運動的軌跡果然是簡單的拋物線。

肆、可行的改良措施

這個創新的設計，目前尚不太耐摔，還有改進的空間：1. 如果須要精密調整質心的位置，可另外於此教具上加裝至多三個螺絲釘和螺絲帽，此三個螺絲釘的方向互相垂直，微調螺絲帽在螺絲釘上的位置，以精確調整教具的質心，使之與小燈泡完全重合，使演示效果更為完美。2. 整個教具改以具有適當彈性、更耐摔的材質（例如塑膠）製作，使教具在拋擲的過程中不易摔壞，更為耐用。4. 在質心之外的其他位置（質心位置的燈泡則增加其亮度），加裝不同顏色的小燈泡，並有開關分別控制，依演示實驗的需要，分別顯示整個教具各部分（包括質心）運動

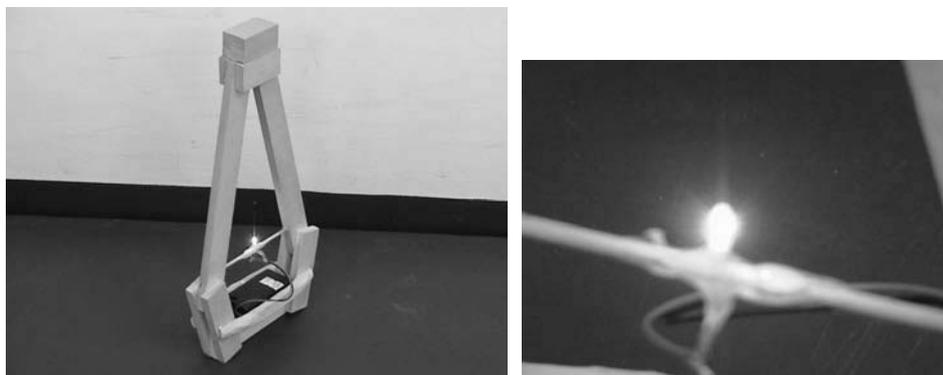


圖 3：發光的小燈泡標示出這個物體的質心；右圖為發光的小白熾燈特寫。



圖 4：在暗室任意拋出此教具，並使此教具轉動，利用視覺（暫留），可觀察質心運動的軌跡。

的情形。

肆、結論

這項創新的教具，填補了質點系統運動和質心這項教學主題在實驗教具上的不足，構造很簡單，非常容易自製，但教學應用的價值頗高，效果也令人印象深刻，可適用於國、高中至大學的力學教學。在低年級的課堂上，用來直接演示質心運動的特性；在大學的課堂上，則用來驗證上述較深的力學計算。

參考文獻

1. 中央大學物理演示實驗室網站 <http://demo.phy.tw/>
2. D. Halliday, R. Resnick and J. Walker (2004), *Fundamentals of Physics* 7th ed., New York, John Wiley & Sons, Inc
3. Louis A. Bloomfield (2010), *How things work : The physics of everyday life*, 4th ed., pp. 49, , New York , John Wiley& Sons, Inc.

A teaching instrument for demonstrating the motion of center of mass

Chien-Heng Chou
Vanung University

Abstract

Strictly speaking, Newton's second law was originally applied to a single-particle motion, but in daily life and various engineering fields we have to deal with the objects with different shapes and sizes. The objects can be viewed as consisting of particles. After we apply Newton's second law to each particle of the object, it is not difficult to draw a very simple result. Newton's laws along with related calculations show following interesting conclusion: An object is thrown near the surface of the earth and the object of course is subject to gravity. If air resistance is ignored, the trajectory of its center of mass is a simple parabola. Author designs and makes a teaching instrument which can vividly demonstrate this surprising phenomenon about the trajectory of the center of mass.

Key words: Center of mass, Parabola, Gravity

