

水瓶側孔的壓力與射程的迷思

黃明輝

國立聯合大學 能源工程學系及共同教學中心物理組

(投稿日期：民國 101 年 01 月 24 日，修訂日期：101 年 04 月 05 日，接受日期：101 年 04 月 12 日)

摘要：國民中學的自然與生活科技的物理部分會介紹水的壓力。爲了觀察水壓與距離水面高度的關係，教科書中常用一個側面開小孔的水瓶作實驗。觀察水柱噴出的速度或距離，學生可以直覺地歸納出水壓與深度的關係。但是常見的錯誤是忽略了落地的時間！某些教科書就誤導成射程遠代表水壓大。國民中學的教科書從民國 92 年九年一貫的課程推出以來，就出現此項迷思。此迷思在西方也出現過，甚至可追溯至 15 世紀的達文西。後人以訛傳訛，流傳至今。本文首先檢視此迷思在現行教科書與其歷史的背景，然後指出迷思的錯誤與正確解法，最後說明兩種替代方法，使教師可以使用此簡便的水瓶實驗，正確地講解與示範水壓力與射程的關係。

關鍵詞：白努利定律、達文西、托里切利定律、水壓、射程

壹、背景說明

液體壓力是國民中學自然科與生活科技課程的一部分。液體壓力 P 正比於距離液面的垂直高度 h 。教科書中常用的示範方式有兩種：

一、薄膜水壓觀測器：

以薄膜套住內裝空氣的圓柱體，做成類似鼓的形狀。將此鼓狀物放入水中，觀察薄膜受水壓影響而凹陷的情形，由形變的大小

推測水壓的大小。這種方式的形變可以很容易地聯想到壓力，但薄膜張力較大，需要水位高低相差較大，才能明顯看到效果。而且儀器小、製作比較不容易，學生不易自己重複製作。部分使用軟性的柱體，例如寶特瓶，可能會因以手指握住容器，使薄膜變形漏水，或內部氣壓增加，抵銷部分水壓。雖然有商業化產品，可以避免這些因素，但缺乏讓學生動手做的效益。整體而言，雖然可以看到水壓的效果，但商業化產品較貴，自製成品可能不太好用。

二、水瓶噴水實驗：

以柱狀容器裝水，在側面開小孔，觀察水噴出的速度或距離，依此推測壓力的大小，如圖 1 所示。此方式簡單方便，人人可做，效果也明顯。因此這是許多教師會讓學生動手做的實驗；學生也可以自己仿造教科書的例圖(如圖 2 所示)，拿個寶特瓶就可以做實驗。以下專門討論此方式的示範實驗。

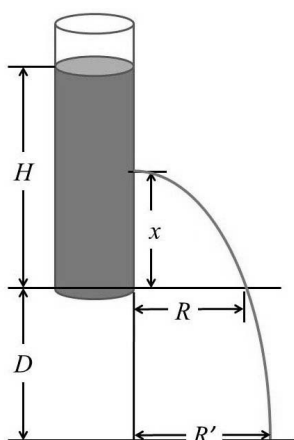


圖 1：水瓶噴水實驗的示意圖。射程 R 為開孔至水柱與瓶底接觸點的水平距離。其他變數第參節再詳述。

貳、水壓與射程的疑惑

使用過水管澆水的人都有經驗，要讓水噴得更遠，可以將水管出口縮小，讓水壓增加；有時壓力太大，甚至會使水管脫離水龍頭。因此「水的壓力越大、噴出的距離越遠」是很直覺的印象。這個『從開孔到落地點的水平距離』稱為射程(Range, R)。以邏輯關係來說明：這個經驗代表『若壓力越大，則射程越遠』。如圖一所示，靜止液體的壓力 P 正比於開孔距離液面的高度或是孔的深度 $(H-x)$ ， $P = \rho g(H-x)$ 、 ρ 是液體的密度、 g 是重力加速度。越低的開孔，深度 $(H-x)$ 越大，壓力越大，『若開孔越低，則壓力越大』。

假如兩邏輯關係式都成立的話，很容易地推論出 (若開孔越低，則壓力越大) \cap (若壓力越大，則射程越遠) = (若開孔越低，則射程越遠)。多數版本的教科書就按照此邏輯，在水瓶噴水實驗中比較不同高度的開孔，觀察水噴出的距離，如圖 2 所示。然後就以「若噴出的距離越遠，則壓力越大」，進

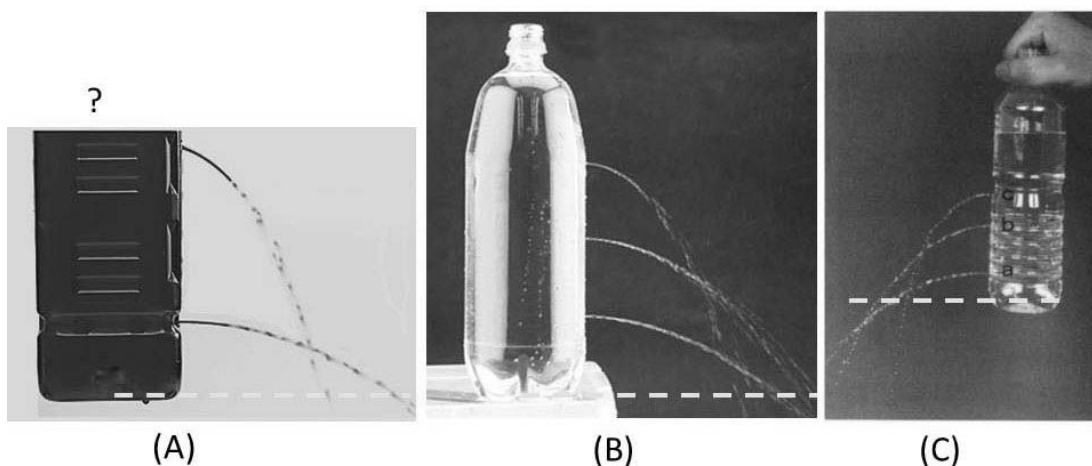


圖 2：國中教科書中常出現的兩孔或三孔的水瓶噴水實驗。黃色虛線為額外加上的參考水平面，原教科書沒有這一條虛線。此虛線約為瓶底的高度，本文射程 R 就是相對於此虛線。圖(2-A)缺少瓶子上方的部分，無法判斷水面位置；且上方開口的水柱噴出時與瓶身沒有垂直，這也會減少射程。圖(2-B, C)可看出中間開孔的射程最遠。

而推論出水壓的原理：「越低的開孔、水的壓力越大」。仔細看圖 2，就可發現水柱有交叉的現象。顯然在交叉點的水平面上，上下開孔的射程是相同的；而且從圖 2-(B), 2-(C)可看出，中間孔的射程可能比最低孔的射程更遠。示範圖片就已經否定了「水的壓力越大、噴出的距離越遠」的迷思，更不能用來反推「越低的開孔、水的壓力越大」。

參、歷史回顧

民國 91 年開始實施九年一貫課程，同時開放民間廠商編排教科書。在此之前由國立編譯館主編的部編版物理課本中只用了薄膜水壓觀測器，這個水瓶噴水實驗是在 92 年開始出現在民間廠商編排的教科書中，至今已經有九年的歷史了！它似乎具有傳染性，連廠商也都喜歡以這個簡便的示範實驗。首先是康軒版(第三冊、國中二年級上學期)，接著 93 年出現在翰林版(第四冊、國中二年級下學期)與育成版(第五冊、國中三年級上學期)，然後 94 年出現在南一版(第四冊、國中二年級下學期)。

高中課本中也出現類似實驗，90~95 年的南一版(高中物理二年級下學期)出現雙孔噴水的照片，但課文只提到觀察水柱是否垂直瓶壁，由此推論測壓力的方向。此部分不牽涉射程與壓力的關係，如此引用沒有問題。95 年改用新課綱後，南一版保留相同內容，但增加了薄膜水壓觀測器的圖。96 年的龍騰版也加入一張雙孔噴水的照片，課文提到側壓，圖的解說是「水壓力隨深度改變」。96 年的勁園版課文中並無相關內容，但在習題中出現一個三孔噴水的簡圖，並要學生探討孔的高度與水的流速的關係。雖然高中物理教科書的相關內容都是正確的，但是此時的高中生都已經讀過國中時錯誤的內容，這些圖及解說的內容恐怕會繼續提醒學生舊的迷思。

這個迷思不只是發生在臺灣，也發生在歐美等西方國家的教材中。其淵源甚至可追溯至一代奇才李奧納多·達文西(Leonardo da Vinci, 1452-1519)。圖 3 顯示達文西在 15 世紀時已經使用了類似的示意圖。1828 年時，後代學者將達文西的手稿及歷經許多次的手

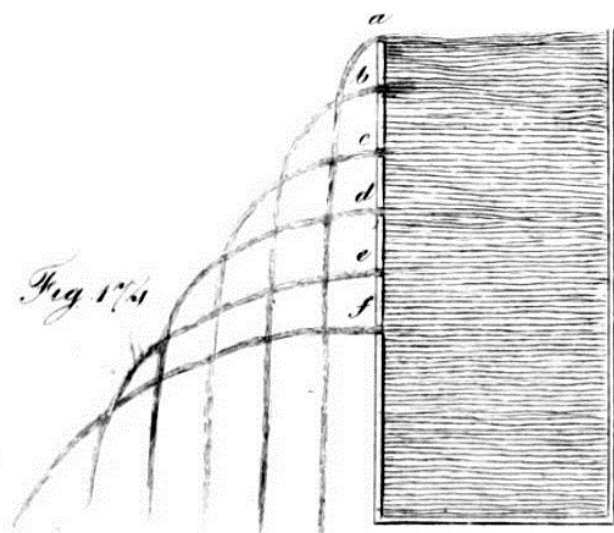


圖 3：在達文西的手稿合輯 *Del Moto e misura dell'acqua* 中，已經使用了左邊的水瓶側孔噴水的示意圖。類似的錯誤示意圖一直流傳至今。

抄本集結成一本書 *Del Moto e misura dell'acqua*。此書中，達文西解說了許多水流的現象，此書被認為是流體力學最早的經典書籍。比較此圖 3 與圖 2-B 的實驗圖，就可發現達文西的錯誤。後代的人可能在不細究下引用了達文西的圖，就此以訛傳訛、流傳至今。即使到了近代，許多學者(蔡兰芳、钟兴宾，2000；陈智伯、廖正琴，2003；Paldy, 1963；Biser, 1966；Grimvall, 1987；Atkin, 1988；Slisko, 2009；Planinšič et al, 2011)對此迷思提出反駁，但仍有不少書籍仍未更正。2004 年物理奧林匹亞競賽中也有一題類似的題目，試圖匡正此迷思(林明瑞，2004)。

肆、水壓與射程的正確解答

假如瓶壁是垂直的話，水離開水瓶時應該是水平方向。不考慮水與空氣的阻力時，水柱的射程就成了標準的二維水平拋射運動，水平方向是等速度運動，垂直方向是無阻落體(free fall)的重力加速度運動。因此射程就只是水平初速 v 乘上落地時間 t ， $R=vt$ 。當定義射程時，設定了水平面時，也就設定了落地時間 t 。部分教材中提到的流速與射程，必須在相同落地時間時，才有正比關係。

第三節所提：(若開孔越低，則壓力越大) \cap (若壓力越大，則射程越遠) = (若開孔越低，則射程越遠)，初看似乎是合乎邏輯的推理，但卻隱藏不同的條件，這兩關係式在水瓶噴水實驗中無法同時滿足！上面以水管為例時，「水的壓力越大、噴出的距離越遠」這句話是正確的。因為比較時，水離開水管的高度是相同的，落地時間 t 也就會相同。但是水瓶噴水實驗中不同高度的孔，其落地時間 t 不同。離地面高的孔，壓力小、初速小、但落地時間長；離地面低的孔，壓力大、初速大、但落地時間短。從這些定性的推理，

就知道此實驗的速度與落地時間同時在變化，沒有做好控制變因，因此不能用射程來推論壓力大小。

多數教材中並未明確定義如何測量射程，或者前後定義不同(先相對於瓶底，後相對於地面)。重點是從哪一個高度去測量射程？圖 2 中，加畫上一條黃色虛線代表瓶底的高度，射程設定在此水平面上。

定量上，完整的解答如下，此法以開孔距瓶底的高度為 x 為主要參數；林明瑞(2004)有另外一種以深度($H-x$) 為主要參數的類似解法。假設瓶內水面距瓶底的高度為 H ，開孔面積 a ，水瓶截面積 A 。水流出開孔的速度是 v ，水面下降的速度是 V 。由連續方程式可知水的流量 F ，

$$F = AV = av \Rightarrow V = \frac{a}{A}v \dots(1)$$

則按照白努利定律，

$$P_a + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gH = P_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gx$$

$$v^2 = V^2 + 2g(H-x) \dots(2)$$

其中 P_a 是大氣壓力， g 是重力加速度， ρ 是水的密度。當開孔面積 a 遠小於瓶子的截面積 A 時，水面下降的速度 V 遠小於開孔處水的初速 v 。此時相當於水面高度不受流出水量影響的靜態解。初速 v 就跟無阻落體一樣，

$$v = \sqrt{2g(H-x)} \dots(3)$$

16 世紀的學者托里切利(Evangelista Torricelli, 1608-1647)發現這個關係，更正了圖 3 達文西的這項錯誤。此式就被稱為托里切利定律。

假設開孔垂直於瓶壁，水壓造成的力使水以水平方向噴出，因此初速只有水平分量。離開開孔後，落地時間就只有重力加速度的影響。因此落地時間是

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \dots (4)$$

在不考慮空氣阻力下，射程 R 是

$$R = vt = 2\sqrt{x(H-x)} \dots (5)$$

射程 R 與開孔高 x 的關係如圖 4 所示，射程的最大值出現在 $x=H/2$ ，也就是水面高度的一半。

從此項推理及圖 4，可看出「水的壓力越大、噴出的距離越遠」這句話的錯誤。圖 2-2 最高(c)與最低(a)兩個開孔約在距離水面高度比約為 1:3，壓力差了約三倍，但是兩者射程約略相同。明顯地證明，在瓶底的射程遠近不能代表壓力的大小。

實際狀況下，必須考慮水與孔壁或空氣的阻力。水離開開孔時，受到瓶壁與開孔的黏滯力。當水噴出與空氣接觸後，水流也會受到空氣的阻力，水流也會從層流轉變為湍流，甚至變成分散的水珠。其複雜的關係無法以簡單的解析方程式列出。綜合而言，水平速度 v 會逐漸減小，實際射程 R 會比第

(5)式還要短。由於空氣阻力所做的負功與路徑長度成正相關，較高的孔的水柱路徑較長，其射程減小的比率會比較明顯。此現象可從圖 2-2 中發現，a 孔射程減損的比率最小。Planinšič, G., Ucke, C., 和 Viennot, L. (2011)的文中也有一張比較理想液體的射程與實際射程的照片，實際射程約只有第(5)式的 66% ~ 75%。依此推測，最大射程約出現在 x/H 稍小於 0.5，或者比液面一半高度稍低的高度。

伍、正確的示範

上一節的正確解答牽涉到許多國中二年級尚未教到的內容，例如：重力加速度與二維運動要到國中三年級才教到；白努利定律也只講現象，不牽涉計算；連續方程式更不在教材範圍。因此這個完整解法遠超過國中二年級的課程範圍與學生的理解能力，國中教師不應該也不需要這種方式來教導學生。高中的課程則可以適當的說明，以此例

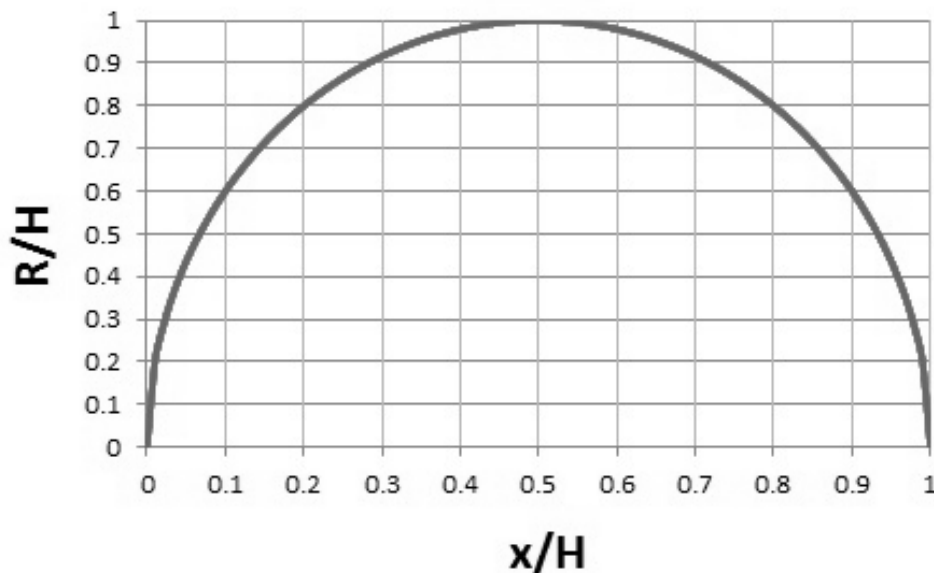


圖 4：在瓶底的射程 R 與孔高度 x 相對於水面高度 H 的關係，由此可見最大射程出現在開孔在瓶高一半的位置。此圖可解釋圖 2-2 中間孔的射程最遠的現象。

整合拋體運動與液體壓力，並且學習實驗的控制變因。

此實驗的解說雖然有錯誤，但實驗本身仍有其簡便、經濟與鼓勵學生動手做的價值。只要用正確方法避免上述問題，就不需要刪除此簡便的實驗。以下說明兩種簡便的解決方法。

一、正確的示範：

首要重點是控制落地時間。可以使用多個瓶子，讓開孔離地面位置 x (控制變因) 一樣高，參考圖 5。改變水面高度 H ，觀察射程 R 。如此射程 R 與自變數 H 或壓力 P 就有正相關 ($R \propto \sqrt{P}$)：若壓力越大，則射程越遠。更簡單的方式可以只用一個水瓶與一個開孔，隨著水流出瓶子，水面持續下降，射程也跟著減少。

二、近似正確的示範：

若仍以一個瓶子多個孔做實驗，則不能以瓶底為定義射程的水平面，必須將瓶子拉高到遠大於 H 的高度，參考圖 1。假設瓶底離地面高度 D ，則落地時間主要是由 D 決定，第(4)式修正為：

$$t = \sqrt{\frac{2(x+D)}{g}} \quad \dots(7)$$

最後第(5)式射程修正為 R'

$$R' = vt = 2\sqrt{(x+D)(H-x)} \quad \dots(8)$$

開孔處的水壓是 $P = \rho g(H-x)$ ，只要 $D > H$ ，就會符合開孔低→壓力大→射程遠的關係。其實，當 $D=H$ 時，瓶底就在 $(D+H)$ 的一半高，則開孔位置就在相當於圖 4 中 $x/H < 0.5$ 的部分。

當 $D \gg H > x$ 時，

$$R' \cong 2\sqrt{D}\sqrt{(H-x)} \propto \sqrt{P} \quad \dots(9)$$

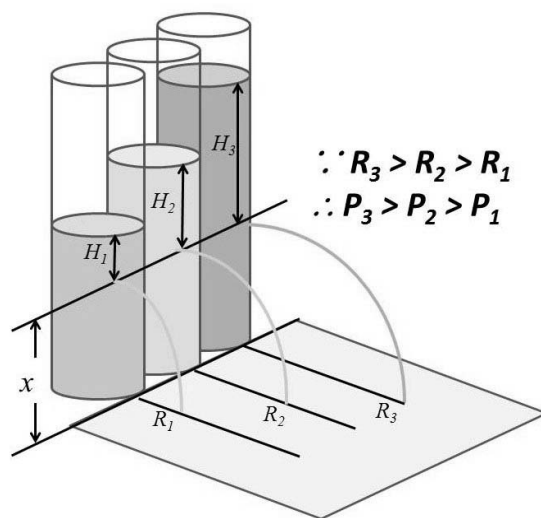


圖 5：水瓶噴水實驗的正確實驗方式。控制變因是開孔高度 x ，如此落地時間 t 就會相同。自變數是水面高 H ，應變數是射程 R 。如此即可由射程推測壓力，進而推測壓力與深度的關係。

此時噴水射程與壓力的關係越趨近於正確的解。

陸、結論

觀察水瓶側面開孔的噴水實驗，是講解靜止液體壓力的方便且有直覺效果的實驗。但坊間教科書的說法卻忽略落地時間的影響，造成半對半錯的內容。本文指出錯誤的原因是忽略落地時間的影響，並提出正確的解答。為了繼續使用此方便的實驗，本文提供兩種方案。希望國民中學的教師可以依照建議的方式，改善錯誤的教材，並修正練習題與考試題目。而高中教師也可藉此題，訓練學生操縱變因與控制變因，並整合液體壓力與拋體運動。

參考文獻

1. 林明瑞(2004)：物理奧林匹亞競賽試題與解答。物理雙月刊，26(6)，785-787。
2. 蔡兰芳、钟兴宾(2000)：从水筒側壁的小孔噴出的水流是否深度越大，噴得越远？。中学物理教学参考，2000 (09)，20-21。
3. 陈智伯、廖正琴(2003)：小孔流速与射程。物理通报(Physics Bulletin)，2003(06)，21-22。
4. Atkin, J.K. (1988). The great water-jet scandal, *Physics Education*, 23, 137-138.
5. Biser, R. (1966). The water can explored again. *The Physics Teacher*, 4, 304.
6. Grimvall, G. (1987). Questionable physics tricks for children. *The Physics Teacher*, 25 (6). 378 – 379.
7. Paldy, L. (1963). The water can paradox, *The Physics Teacher*, 1, 126.
8. Planinšič, G., Ucke, C., and Viennot, L. (2011). Holes in a bottle filled with water: which water-jet has the largest range? *Physics Education Division (PED) of the European Physical Society*, Retrieved June 20, 2011, from <http://education.epsdivisions.org/muse/example-water-jets-bottle-with-holes/bottlewithholes.pdf>
9. Slisko, J. (2009). *Repeated errors in physics textbooks: what do they say about the culture of teaching?* Proceeding of the Physics Community and Cooperation. GIREP 2009. University of Leicester.
10. da Vinci, Leonardo (1828). In Francesco Cardinali (Eds), *Del Moto e misura dell'acqua*, Bologna, Italy. Retrieved June 20, 2011, from <http://www.archive.org/details/delmotoemisurad00leongoo>

Myth of the pressure and range of jets from side wall of water can

Ming-Huey Huang
National United University

Abstract

Water pressure is a part of course “Natural Science and Technology” in grade 8 in Taiwan. To observe the dependence on height of water pressure, a simple experiment using a bottle of water with holes on the side-wall were used in many textbooks. By watching the speed and range of water-jet, student can infer the relation of water pressure and depth intuitively. However, a common mistake is neglecting the effect of falling time. Some textbooks misinterpreted as “the longer the range, the higher the pressure”. Such myths started when Taiwan educational system convert to 9 years consecutive curriculum in 2003. This myth also appears in Western world and it even can be traced back to Leonardo da Vinci in the 15th century. Mistakes were passing down for many generations, up to current time. This article reviews this misleading experiment in the current textbooks and its historical background, and then points out the mistakes and provides correct answers. Finally, two alternative solutions are suggested, so the teachers can use this simple experiment to demonstrate proper relation of water pressure and range.

Key words: Bernoulli equation, Leonardo da Vinci, Torricelli law, Water pressure, Range