

虛像的實像

周鑑恆

萬能科技大學 光電工程系

(投稿日期：民國 101 年 01 月 17 日，修訂日期：101 年 02 月 25 日，接受日期：101 年 03 月 02 日)

摘要：以一種相當簡單的想法，透過作圖與理論計算，較完整地解釋一種著名光學教具的原理，一方面有助於了解實像和虛像的特性，另一方面掌握拋物面鏡反射的原理。

關鍵詞：拋物面鏡，實像，虛像

壹、前言

有一種光學玩具，形狀像一個有蓋子的碗，蓋子正中心有一個孔，蓋子和碗的內面都是球面鏡。碗內中心處放一隻小豬（或小青蛙）等模型。神奇的是：蓋上蓋子之後，在蓋子中心的孔中就會出現另一隻小豬（或青蛙），用手去摸，卻摸不著。這個光學玩具呈現的現象令人好奇，構造簡單又易於演示出實驗的主題，其實是相當重要的幾何光學教具，它凸顯了幾何光學中實際物體、實像、虛像的光學行為非常類似的重點。

這玩具的專利說明書中¹，以及生產這玩具的廠商在說明書^{2,3}上通常會略加說明它的原理，但絕大部分廠商的說明都太簡略，漏失了其中最有價值的重點。因為甚具啟發性與趣味性，國外不少大學的演示實驗室也有這項光學玩具⁴⁻⁸。其實，蓋子上的孔中的小

豬（或青蛙）是實像，實像就如同在實像所在處的實物一樣，是可以直接看到的。

一般的教學實驗，常以屏幕來呈現實像，使學生誤以為實像只能在屏幕上看到，這是臺灣幾何光學教學上的缺點，妨礙了學生進一步理解望遠鏡或顯微鏡等光學儀器的原理。

而蓋子中間的孔中的實像，是碗底小豬的虛像構成的（虛像就如同在虛像所在處的實物一樣）。此外，這簡單玩具的原理還涉及球面鏡成像的若干細節。

簡潔明白的解釋這個玩具成像的過程，有助於瞭解實像和虛像的特性，也有助於瞭解面鏡成像的原理。這玩具就像重點習題，可用來作為面鏡成像之演示教具。

貳、原理

在幾何光學中，實物、實像和虛像都可視為由如同畫素(pixel)的點光源所組成的。因此實像或虛像在一定條件上，就如同在實像或虛像所在位置的實際物體。從這個角度，很容易以簡單明瞭的解釋，較清楚的說明這項光學教具的原理。

見圖(1)，在此教具中，蓋子和碗的內面其實都是球面鏡(拋物面鏡)，但蓋頂上有一圓孔；物體比較特別，與教科書常見垂直於光軸的平面物體不同，它是立體的，為方便起見，在圖中以兩支尾部相接的箭頭代表，其中一箭頭垂直光軸(端點為B)，另一箭頭向上翹起(端點為A)，顯示此物體的立體特性。

見圖(1)，物體首先因為蓋子內面的球面鏡，形成一個放大的虛像(大小失真的兩支尾部相接的箭頭，其中一箭頭垂直光軸(端點為B')，另一箭頭翹起(端點為A'))。值得注意的是：因為物體本身並非一個平面上的物體，所以此虛像也是立體的，而且因為物體上各點光源距離面鏡的距離不同，所以物體的虛像顯然失真變形，然而根據虛像也是由點光源構成的特性，此虛像也可視為在該處的實際物體(當然，在該光學玩具中此“實際的物體”是一隻“放大”的“變形”小豬(或青蛙))。

此時，蓋上的孔使得蓋子球面鏡的截面是環形，而非圓形，但環形的球面鏡照常能依球面鏡成像原理成虛像，與相同焦距的圓形球面鏡成像相同。圖(1)中圓圈1代表平行主軸的入射光，圓圈2代表射到鏡頂的入射光，這兩條光線經球面鏡的反射光方向很容易決定，以之很容易決定虛像。

圖(二)中，將虛像視為在該處的實際物體，此實際物體會因底下碗內面的球面鏡

而成實像。在此過程中，蓋上的孔有何影響呢？因為蓋上的孔，不能反射原始真實物體(箭頭AB)上發出的光，所以蓋上的孔，可視為擋在碗底球面鏡與虛像(箭頭A'B')，如在該虛像處的真實物(在該虛像處的真實物)之間的障礙物，圖(2)中虛線處代表碗蓋上圓孔所造成的等效光遮。於是虛像(視為實物)，就可因為碗底拋物面鏡之反射形成實像(箭頭A''B'')。雖

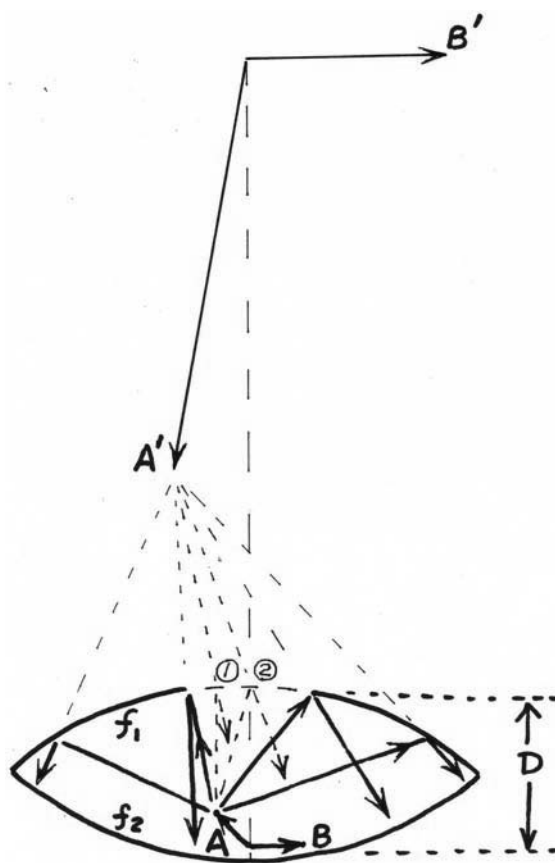


圖1：蓋子和碗的內面都是球面鏡(拋物面鏡)。上蓋球面鏡的焦距為 f_1 ，下方球面鏡的焦距為 f_2 ，上蓋球面鏡鏡頂和下方球面鏡鏡頂之間的距離為 D ；上蓋子球面鏡形成一個放大的變形虛像。

然圓孔好像擋在虛像（就視為真實物體）與碗底面鏡之間的障礙物，不過要形成實像，碗底面鏡只須是球面鏡，但截面卻不一定是圓形，擋掉一部分碗底球面鏡就如同改變其截面形狀一樣。

在形成實像時，虛像上每一個點光源發出的光線經碗內球面鏡反射之後，又必須透過蓋上圓孔才能彙集到成像的地方。此時圓孔又變成了可以透光的孔。又因為虛像本身是立體的，形成實像之後，又發生變形失真的情形，但因恰巧將原先的變形大致糾正過來

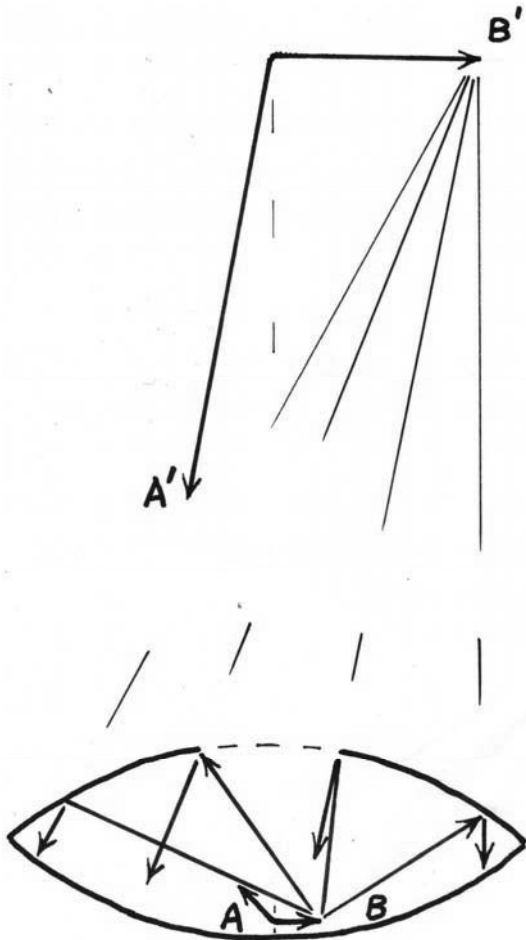


圖 2：將虛像視為實際物體，因底下碗內球面鏡而成實像。因為蓋上的孔，不能反射原始真實物體（箭頭 AB）上發出的光，所以，以 B' 為例，蓋上的孔可視為擋在碗底球面鏡與虛像（箭頭 A'B'）之間的障礙物。

來，於是就形成與原物大致相同的實像（見圖（3））。

這個實像與實際的物體一樣，也是由點光源構成，所以視覺上看起來與實物無異，所以才造成看得到卻摸不著的其他現象。

實物，虛像和實像，均是由點光源構成，在光學上、視覺上乃至於攝影時，是無法分辨的，也是說，虛像和實像在光學上就如同其所在處真實存在的物體一樣。區別在於物體上的點光源（或 pixel）發出的光線分佈在較無限制的立體角之內；而虛像和實像上各

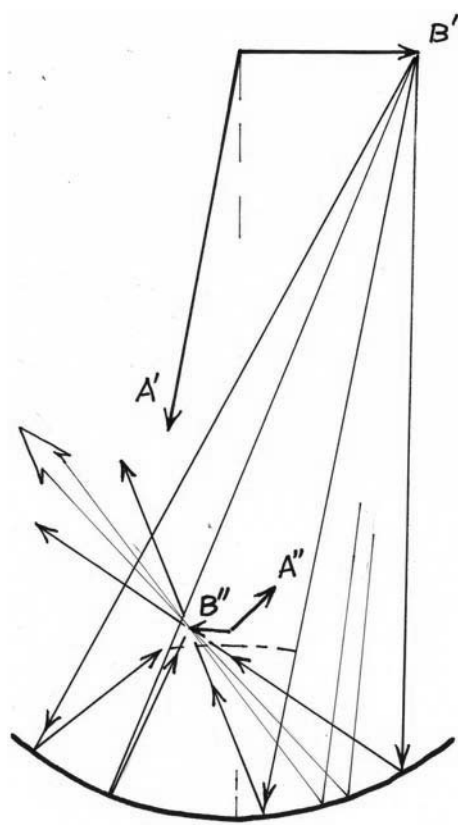


圖 3：因為變形失真的虛像是立體的，形成實像之後，又發生變形失真的情形，恰巧將原先的變形大致糾正過來，形成與原物大致相同的實像。

點光源發出的光線分佈在較有限的立體角範圍之內。只要點光源發出的光能進入眼中，眼睛就能看到點光源，也就能看到點光源形成的實物，虛像或實像。

參、理論計算

根據球面鏡成像的公式^{9,10}， i 為像距鏡頂的距離， o 為物距鏡頂的距離， f 為球面鏡的焦距，等於球面鏡半徑 R 的二分之一。則像的距離 i ，物的距離 o 和焦距 f ，滿足下式關係。

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad \dots\dots\dots (1)$$

見圖 (1)，假設上蓋球面鏡的焦距為 f_1 ，下方碗狀球面鏡的焦距為 f_2 ，上蓋球面鏡鏡頂 (在圓孔處) 和下方碗狀球面鏡鏡頂之間的距離為 D 。則在碗中立體小物體的底部距上蓋球面鏡頂的距離即為 D ，若小物體高度為 S ，則小物體頂端距上蓋球面鏡鏡頂的距離為 h ， $h = D - S$ 。

首先計算小物體的底部成像的情形。利用成像公式，小物體的底部經上蓋球面鏡反射形成的虛像滿足下式

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f_1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

其中， D 為小物體底部距上蓋球面鏡鏡頂的距離，經計算可得

$$i = \frac{f_1 D}{D - f_1} < 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

雖然小物體底部在上蓋球面鏡中成虛像，此虛像距上蓋球面鏡鏡頂為 $|i|$ 。對碗狀球面鏡而言，此虛像就如同在該處的實物一般，此實物距碗狀球面鏡距離 O_{new} 可表示為：

$$O_{new} = |i| + D = \frac{2f_1 D - D^2}{f_1 - D} \quad \dots\dots\dots (4)$$

再代入球面鏡成像的公式：

$$\frac{1}{O_{new}} + \frac{1}{i_{new}} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{i_{new}} + \frac{f_1 - D}{2f_1 D - D^2} \quad \dots\dots (5)$$

其中 f_2 為碗狀球面鏡焦距，即可求出碗狀球面鏡，上蓋球面鏡形成的虛像形成實像的位置 i_{new} ：

$$i_{new} = \frac{2f_1 f_2 D - f_2 D^2}{(2f_1 + f_2)D - D^2 - f_1 f_2} \quad \dots\dots (6)$$

假設小物體底部的最後實像就在圓孔處，所以假設

$$i_{new} = D \quad \dots\dots\dots (7)$$

即得到 f_1, f_2 和 D 關係的方程式

$$\frac{2f_1 f_2 D - f_2 D^2}{(2f_1 + f_2)D - D^2 - f_1 f_2} = D \quad \dots\dots (8)$$

簡化為：

$$D = (f_1 + f_2) - \sqrt{(f_1 + f_2)^2 - 3f_1 f_2} \quad \dots\dots (9)$$

也就是說，如果最後小物體的底部之實像位於上蓋圓孔中，藉此公式可知，決定了上蓋球面鏡焦距 f_1 ，和碗狀球面鏡焦距 f_2 ，即可求出兩球面鏡鏡頂距離 D 。

如果小物體最後所成的實像不失真，則小物體的頂部的實像位置，就必須在圓孔上方與小物體同高之處。小物體頂部距上蓋球面鏡距離 h ，則小物體之高度即為 $D - h = S$ 。同樣代入球面鏡成像公式，可得

$$\frac{1}{i_t} + \frac{1}{o_t} = \frac{1}{f_1}; o_t = h \quad \dots\dots\dots (10)$$

則得

$$|i_t| = \frac{f_1 h}{f_1 - h} > 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

此虛像距離碗狀球面鏡之距離

$$O_{mew} = |i_t| + D, \text{ 則可得}$$

$$\frac{1}{O_{mew}} + \frac{1}{i_{mew}} = \frac{1}{f_2} \quad \dots\dots\dots(12)$$

簡化得

$$i_{mew} = \frac{(f_1 f_2 - D f_2) h + D f_1 f_2}{(f_1 + f_2 - D) h + D f_1 - f_1 f_2} \quad \dots\dots(13)$$

若不失真，不變形，底部和頂部的高度應與小物體實際高度相同，亦即 (D-h)。所以小物體頂部最後的實像距離碗狀球面鏡 2D-h，亦即

$$i_{mew} = 2D - h \quad \dots\dots\dots(14)$$

合併 (13)、(14) 式，可得下列方程式，此方程式顯示如果高度不失真，D 與 h 的關係，

$$(f_1 + f_2 - D)h^2 + [-3Df_2 - Df_1 + 2D^2]h + 3Df_1f_2 - 2D^2f_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

由此式即可解定 h，亦即決定了小物體之高度 D-h。

肆、主要參數

以下的計算，為設計此項光學教/玩具時提供重要建議。例如，考慮最簡單的情形，假設 $f_1 = f_2 = f$ ，則根據 (9) 式，得

$$D = 2f - \sqrt{4f^2 - 3f^2} = f \quad \dots\dots\dots(16)$$

根據 (15) 式，得

$$h^2 - 2fh + f = 0 \Rightarrow h = f \quad \dots\dots\dots(17)$$

則小物體之高度 $D-h=f-f=0$ 幾乎為零，換言之，小物體之尺寸必須很小，否則最後實像或失真。

為了方便，此玩具上蓋和碗狀球面鏡之焦距均相同，由計算可知最後的實像和原本的小物體之間多少有些失真。如果以最後實像的高度與小物體之原有高度之變化，作為失真變形的指標，亦即兩者高度差愈大，最後實像與原物體之間就有愈大的差。

根據 (13) 式

$$i_{mew} = \frac{(f_1 f_2 - D f_2) h + D f_1 f_2}{(f_1 + f_2 - D) h + D f_1 - f_1 f_2}$$

在 $f_1 = f_2 = f$ 而 $D = f$ 的情形下；
 $h = D - S$ ，分別代入 (13) 式中，得

$$i_{mew} = \frac{f^2}{h} = \frac{D^2}{D - S} = D + \left(\frac{D}{D - S} \cdot S\right) \quad \dots(18)$$

換言之：小物體的原來高度為 S，而最後實像的高度變為 $\left(\frac{D}{D - S} \cdot S\right)$ ，由此可見：焦距 (亦即兩球面鏡鏡頂距離 D，因為 $D = f$)，與小物體之高度 S 相差越大，最後實像的變形失真的情形愈不明顯。

伍、結論

這項光學玩具原理之解釋可以變得相當簡潔而周延。上蓋球面鏡造成小物體放大且變形的虛像，此變形的虛像可視為存在於虛像所在位置的真實物體，若將此變形的虛像視為真實物，它因為碗狀球面鏡反射所形成的實像也會有若干變形，而恢復到與原物體相似的形狀。

上蓋圓孔對於上蓋球面鏡形成的虛像而言，其作用有如一個擋在虛像 (可視為實物) 與碗狀球面鏡之間的障礙物，而改變了碗狀球面鏡的截面形狀，但即使碗狀球面鏡的截

面形狀不再是圓形，也不會使其形成實像的功能有重大變化。

實像就有如在實像處的真實物體，因為此玩具的實像在蓋中圓孔中，受蓋子圓孔比對的影響，人的視覺就能確知此實像的位置，並試圖捏住，才發現其實捏不到。

理論計算發現，如果上蓋球面鏡和碗狀球面鏡的焦距均為 f ，則兩球面鏡鏡心的距離即為 f 。在此條件下，最後實像的高度和物的高度無論如何不會相等。而物的高度和焦距的比例愈小，最後實像的失真愈小。

此項玩具有助於實像、虛像之教學，也有助於學生理解球面鏡的成像原理和相關計算。

opages/Demo/optics/demo/6a2035.htm

參考文獻

1. D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, Fundamentals of Physics 4th ed., John Wiley & Sons, Inc. 1993.
2. H. Benson, University Physics rev. ed., p 724, John Wiley & Sons, Inc. 1995.
3. <http://courses.umass.edu/plecprep/optics/6a2035.html>
4. <http://sirius.ucsc.edu/demoweb/cgi-bin/?optics-geometric-mirage>
5. <http://spie.org/etop/2007/etop07methodsV.pdf>
6. <http://www.freepatentsonline.com/3647284.pdf> (原始專利 1970 年底)
7. http://www.tech-spiel.ch/mirage_the_perfect_optical_illusion-p-76.html?language=en
8. <http://www.phys.vt.edu/~demo/demos/115.html>
9. <http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/byalpha/cdvideos.html>
10. <http://www.physics.brown.edu/physics/dem>

Real image of the virtual image

Chien-Heng Chou
Vanung University

Abstract

Based on a fairly simple idea, we clearly explain how a well-known optical toy works. The related figures and theoretical calculations are proposed. This task is helpful for understanding the natures of real and virtual images and for noting the details about how the spherical mirrors function.

Key words: Real image, Virtual image

