



## 電子自旋與光波偏振的 類比

龍行天

私立大同大學 物理組

**摘要：**光波的偏振與電子的自旋在物理與數學上有相似的類比性，本文的目的除了在數學上回顧偏振與自旋的相似性外，還將藉由實驗來呈現兩者之間的類比現象，希望為物理教學與學習有所助益。

**關鍵詞：**光波偏振，電子自旋

### 壹、前言

光波的偏振(polarization)與電子的自旋(electron spin)在物理與數學上有相似的類比性，兩者都遵守基底向量的疊加原理，而同一組的基底向量符合正交與歸一性質。在測量下，入射光波與偏極板(polarizer)方向平行的電場分量會通過，與偏極板方向垂直的電場分量會被濾掉。同樣的，將基態的銀原子射入非均勻磁場中，利用遮板將空間量子化分佈(space quantization)後的某一群自旋態的原子群擋住，而擁有另一種自旋態的原子群將被選取出來。本文的目的除了在數學上

回顧偏振與自旋的相似性外，還將藉由實驗來呈現兩者之間的類比現象。

### 貳、光波的偏振與電子的自旋 在數學上的類比

#### 一、光波的偏振態

光波波函數：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = (\hat{i} E_{0x} e^{i\delta_x} + \hat{j} E_{0y} e^{i\delta_y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

由歸一得：

$$\vec{E} = (\hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi e^{i\delta}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\text{上式： } \delta = \delta_y - \delta_x, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

定義光波的偏振態(Jones vectors) [1]：

$$J = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

$$\text{電場在 } \hat{x} \text{ 方向的偏振態： } |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} \text{ 方向的偏振態： } |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ 方向的偏振態： } \left| \frac{\pi}{4} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{4} \text{ 方向的偏振態： } \left| -\frac{\pi}{4} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{左旋圓偏振態： } |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\text{右旋圓偏振態： } |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\text{上式 } \langle x|y\rangle = 0, \langle R|L\rangle = 0, \left\langle \frac{\pi}{4} \left| -\frac{\pi}{4} \right\rangle = 0\right.$$

光波的偏振(疊加)態： $|\psi\rangle = a_+ |\psi_+\rangle + a_- |\psi_-\rangle$

上式 $|\psi_+\rangle$ 與 $|\psi_-\rangle$ 為彼此正交的兩個基底向量

$|a_+|^2$ 表示測到偏振態 $|\psi_+\rangle$ 的光強度

$|a_-|^2$  表示測到偏振態  $|\psi_- \rangle$  的光強度

## 二、電子的自旋態

由角動量代數解得電子的自旋角動量矩陣算符（包立自旋矩陣）[2]：

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z = \hat{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \hat{y} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \hat{z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

由特徵值運算可得三個方向的矩陣算符的自旋態波函數

電子在  $\hat{z}$  方向的向上自旋態： $|\uparrow_z \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{z}$  方向的向下自旋態： $|\downarrow_z \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{x}$  方向的向上自旋態： $|\uparrow_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{x}$  方向的向下自旋態： $|\downarrow_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\hat{y}$  方向的向上自旋態： $|\uparrow_y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\hat{y}$  方向的向下自旋態： $|\downarrow_y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

上式

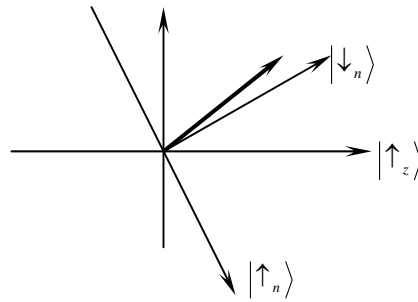
$$\langle \uparrow_z | \downarrow_z \rangle = 0, \langle \uparrow_x | \downarrow_x \rangle = 0, \langle \uparrow_y | \downarrow_y \rangle = 0$$

電子的自旋(疊加)態： $|\psi \rangle = a_\uparrow |\uparrow_\alpha \rangle + a_\downarrow |\downarrow_\alpha \rangle$

上式  $|\uparrow_\alpha \rangle$  與  $|\downarrow_\alpha \rangle$  為彼此正交的兩個基底向量

$|a_\uparrow|^2$  表示測到自旋態  $|\uparrow_\alpha \rangle$  的機率

$|a_\downarrow|^2$  表示測到自旋態  $|\downarrow_\alpha \rangle$  的機率



## 參、光波偏振與電子自旋的兩個類比實驗

### 一、系列的光波偏振實驗

由電磁理論知，任何非偏極光都可分解為兩個彼此垂直的偏振電場的疊加，現在若有一束非偏極光通過兩片偏極方向彼此垂直的偏極板，當光波經過第一片偏極板時，垂直於偏極軸的電場被濾掉，而平行於偏極軸的電場通過，當光波入射到第二片偏極板，因為這時第二片偏極板與入射光波的偏振方向垂直，所以沒有光波輸出，屏幕上測不到光強(圖 1)。

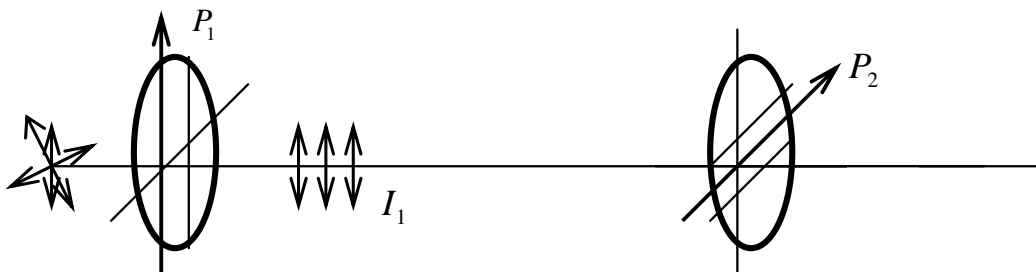
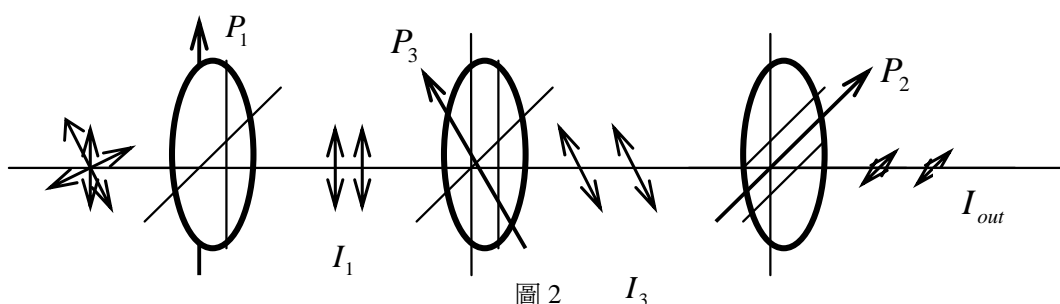


圖 1：非偏極光通過兩塊偏極方向彼此垂直的偏極板，沒有光波輸出，屏幕上測不到光強



現在如果將第三片偏極板放在前述的兩片偏極板間，且第三片與第一片間的偏極軸夾角為  $\theta$ ，由馬呂斯定律(Malus law)知，出射的光強與光波通過第一片偏極版的光強比  $\frac{I_{out}}{I_1} = (\cos\theta \sin\theta)^2$ ，在  $\theta \neq 0$  或  $90^\circ$  的夾角，出射的光波的光強不為零，在這樣的操作下屏幕上可測到光強(圖 2)。

## 二、系列的史坦-格拉克實驗 (Stern-Gerlach experiment)[3]

由史坦-格拉克實驗(圖 3)知，若有一束基態的銀原子 ( $Ag^{47}: 4d^{10}5s^1$ ) 經過非均勻磁場中，因銀原子外層只有一個處在  $s$  層的活性電子 ( $l=0, s=\frac{1}{2}$ )，且核磁子  $\mu_p$  遠小於波

耳磁子  $\mu_B$ ，所以單一活性電子的自旋角動量(sin angular momentum)即為整個基態銀原子的角動量，又因原子在磁區的平均受力  $\bar{F}_z \propto -m_s \frac{\partial B_z}{\partial z} \propto \mp \frac{1}{2}$ ，所以自旋向上(spine up)與自旋向下(spine down)的電子因受力方向相反造成屏上原子分裂兩個區域，這現象稱空間量子化現象。

現在若將兩個完全一樣的磁鐵(磁場的方向皆為  $\hat{z}$  方向)串連在一起，當入射銀原子通過第一塊磁鐵後，利用遮版將  $|\downarrow_z\rangle$  的原子群檔掉，讓  $|\uparrow_z\rangle$  的原子群進入第二個磁區，而後若再利用遮板將第二磁區出射的  $|\uparrow_z\rangle$  原子群檔掉，那麼在第二塊磁鐵的出射屏幕上將完全沒有原子出現(圖 4)。這現象類比於非偏

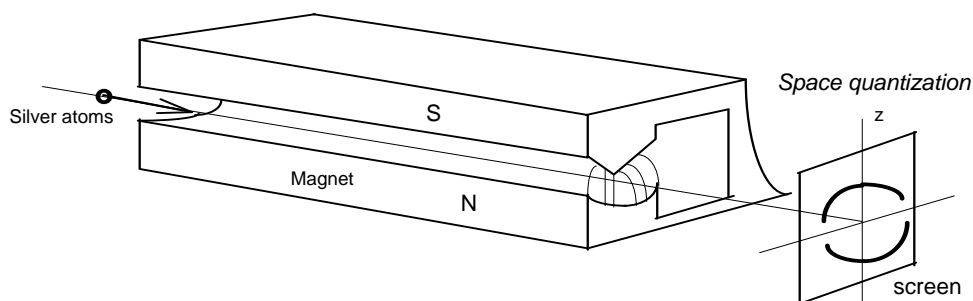


圖 3：史坦-格拉克實驗裝置圖，其中  $\left(\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0\right)$

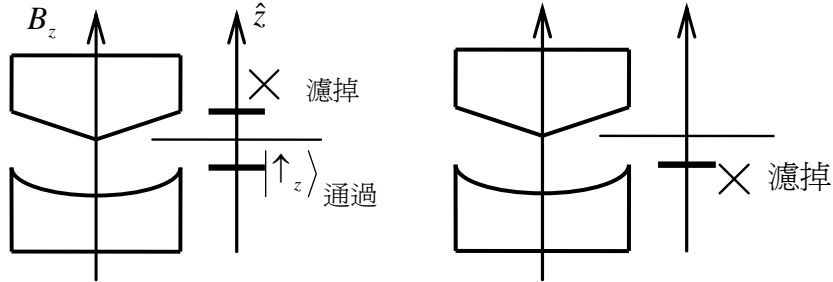


圖 4：原子通過兩塊非均勻磁鐵，在兩次不同位置的遮擋下，出射的原子數目為零

極光經過兩片彼此垂直的偏極板，在屏幕上觀測不到光強的現象是一樣的。

類似前節的光學實驗操作手法，現在將第三塊磁鐵放置在第一與第二塊磁鐵之間，給定磁場的方向

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma} \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \theta \sin \phi \\ i \sin \theta \sin \phi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

為方便計算，令  $\phi = 0$ ，表示磁場在  $xz$  平面，磁場與  $\hat{z}$  軸夾  $\theta$  角，則

$$\hat{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

由特徵值運算可得另一組自旋態基底向量，分別為

$$|\uparrow_n\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \text{與} \quad |\downarrow_n\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

類似光學的實驗步驟，當銀原子通過第一塊磁鐵後，利用遮版將  $|\downarrow_z\rangle$  的原子群檔掉，而沒有被檔掉的  $|\uparrow_z\rangle$  原子群進入第三個磁區。由向量的內積與投影的概念，此時電子的自旋態將由第三個磁鐵所造成的自旋態基底所疊加，所以原子通過第三個磁鐵後將分成兩區。

$$|\uparrow_z\rangle = a_\uparrow |\uparrow_n\rangle + a_\downarrow |\downarrow_n\rangle$$

$$\text{上式 } a_\uparrow = \langle \uparrow_n | \uparrow_z \rangle = \cos \frac{\theta}{2},$$

$$a_\downarrow = \langle \downarrow_n | \uparrow_z \rangle = -\sin \frac{\theta}{2}$$

接著用遮版將  $|\downarrow_n\rangle$  的原子群檔掉，沒有被檔掉的  $|\uparrow_n\rangle$  的原子群進入第二個磁區，現在電子的自旋態將由第二個磁鐵所造成的自旋態基底所疊加，所以原子通過第二個磁鐵後又將分成兩區。

$$|\uparrow_n\rangle = b_\uparrow |\uparrow_z\rangle + b_\downarrow |\downarrow_z\rangle$$

$$\text{上式 } b_\uparrow = \langle \uparrow_z | \uparrow_n \rangle = \cos \frac{\theta}{2},$$

$$b_\downarrow = \langle \downarrow_z | \uparrow_n \rangle = \sin \frac{\theta}{2}$$

接著用遮版將  $|\uparrow_z\rangle$  的原子群檔掉，沒有被檔掉的  $|\downarrow_z\rangle$  的原子群將呈現在屏幕上(圖 5)，這樣的操作方式與前述三片偏極板的光學實驗具有相似的類比性，出射的  $|\downarrow_z\rangle$  態與通過第一個磁鐵的  $|\uparrow_z\rangle$  態的原子數目比：

$$\frac{N_{out}}{N_1} = |a_\uparrow|^2 |b_\downarrow|^2 = \left( \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$$

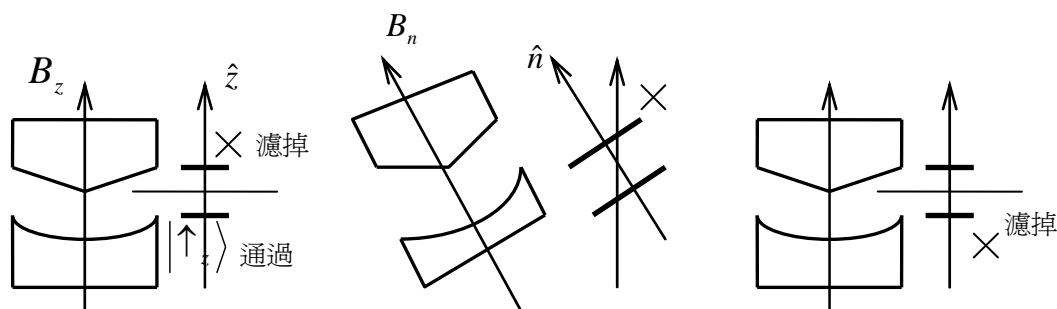


圖 5：第三個磁鐵(方向  $\hat{n}$ ) 放在第一(方向  $\hat{z}$ ) 與第二磁鐵(方向  $\hat{z}$ ) 之間，出射原子數不為零

## 肆、結語

雖然光波的偏振與電子的自旋在數學形式與實驗結果有類比的現象，但筆者在此要特別點出兩者在理論本質與實驗操作上的不同。(一)、光波的兩個偏振基底集在數學與幾何圖象上正交，而電子的兩個自旋態基底集在數學上正交，但在幾何圖象上卻是反平行。(二)、光波偏振態的轉換由偏極板與入射光波的電場間的夾角決定，數學運作的結果由 Jones matrices 控制[1]，電子自旋態的改變由外加磁場的方向決定，數學運作的規則由 Pauli matrices 控制[2]，而 Jones matrices 與 Pauli matrices 兩者在物理本質上是不存有類比性的。(三)、偏極板分光是直接將與偏極軸垂直的電場分量濾掉，平行於偏極軸方向的電場通過，但 stern-Gerlach 實驗的屏幕上卻是同時呈現兩種自旋態的原子群分佈，實驗中還要藉由人為(遮板)將某一原子群檔掉，這樣才能類比到偏極板的分光實驗。由這篇光波偏振與電子自旋在數學與實驗上的類比性介紹，希望能為讀者在教學或學習上有所助益。

## 伍、致謝

特別感謝中央大學光電所樂丕綱教授在我求

學其間的指導與幫助。

## 陸、參考文獻

1. Eugene Hecht 著 Optics p.268~271 台灣歐亞書局代理(1983)
2. Robert Eisberg 著 Quantum Physics (second edition) p.272~P.274
3. Stephen Gasiorowicz 著 Quantum Physics (3<sup>rd</sup> edition) p.158~p.163