

## 二維彈性碰撞教學新解暨演示實驗

洪耀正、鄭翰陽、江俊明\*

逢甲大學物理教學研究中心

\*通訊作者：cmchiang@fcu.edu.tw

(投稿日期：民國 103 年 11 月 26 日，接受日期：104 年 06 月 01 日)

**摘要：**在傳統物理課本討論碰撞的章節中，二維彈性碰撞一直沒有一個較為直觀的理論推導與教學演示實驗。在此我們介紹一個簡易的理論教學策略，同時利用桌上冰球玩具模組(Air Hocker)佐以便宜的高速攝影相機與公共授權軟體 Tracker，進行二維彈性碰撞的演示教學。透過這樣的理論介紹與實驗展示，老師能夠更為容易地傳達關於二維碰撞運動的物理知識，同時也可以引起學生的學習興趣，並藉此培養其數值分析處理的能力。

**關鍵詞：**二維彈性碰撞、Tracker

### 壹、前言

彈性碰撞是高中物理與大學普通物理課程中相當重要的一個主題。普遍來說，學生對於一維彈性碰撞，亦即所有碰撞物體都在同一條直線上的運動行為，可以充分理解。此外，藉由氣墊軌道、滑車、光電管與光電計時器等實驗器材，學生也很容易驗證理論推導的結果。然而就二維彈性碰撞而言，一方面教科書中的推導涉及向量分解與聯立方程的複雜計算，另一方面沒有合適的演示實驗來輔證理論，因此學習上的抽象程度大為提升。如何藉由簡單、直觀的教學設計，讓學生得以輕易地了解二維彈性碰撞的現象，便成為教學上一個尚待改進的問題。

在不考慮轉動的前提下(僅考慮滑動)，二維彈性碰撞和一維彈性碰撞都遵守動量守恆與動能守恆。一維彈性碰撞可以藉由解出聯立方程以了解物體撞後的運動行為。而對於二維彈性碰撞，由於其動量守恆與動能守恆僅能提供三個方程式( $x$  分量與  $y$  分量的動量守恆、系統的動能守恆)，系統整體卻有三個以上的未知變數，因此無法直接求解。不過在限制條件下，亦即被碰撞物體初速為零以及兩物體質量相等時，我們仍可解得相當有趣的結果：碰撞後兩物體之運動方向將成  $90^\circ$ 。這個結果在國內外的許多教科書中都有列出，而處理的方法皆為利用動量守恆與動能守恆方程求得聯立解[1-3]。儘管如此，過程中的代數計算較為複雜，同時推導出來

的結果並不直觀，因此學生往往無法充分理解此現象的成因。

有鑑於此，本文章首先介紹發表在國外期刊的直觀的二維彈性碰撞理論[4]，並設計簡單的演示實驗以檢查該理論結果。在接下來的章節中，我們將逐步介紹這個直觀的推導策略、演示實驗架設與步驟，以及數據分析的結果。我們期待藉由這樣教學設計，老師能夠更為容易地傳達關於二維碰撞運動的物理知識，同時提升學生學習本主題的學習興趣。

## 貳、理論分析：一個直觀的推導策略

在此我們考慮二維彈性碰撞問題之特例，亦即當兩碰撞物體質量相等時，其中一物體以初始速度 $\vec{v}$ 去碰撞另一個初速為零的物體。針對這個問題，一般的處理方法都是利用動量及動能守恆，便可以得到兩者碰撞後的夾角為 $90^\circ$ 。但以下我們介紹的求解方法，不依賴代數繁雜的求解歷程。反之，其著重在向量概念的理解與應用，因此可以幫助學生直觀地得到理論上的結果。以下便是這個推導策略的論述。

首先，讓我們回顧一維彈性碰撞的經典例子。

考慮兩個質量相同的碰撞體( $m_1=m_2=m$ )，進行一維彈性碰撞；亦即碰撞體的運動方向與兩者的質心連線處在同一直線之上，如圖1(a)所示。若碰撞體 $m_1$ 的初始速度為 $\vec{v}$ ，碰撞體 $m_2$ 一開始靜止不動，則碰撞後 $m_1$ 將靜止不動，反之 $m_2$ 以 $m_1$ 的初始速度 $\vec{v}$ 前進。此速度互換的現象為學生相當熟悉的一維彈性碰撞行為之一。

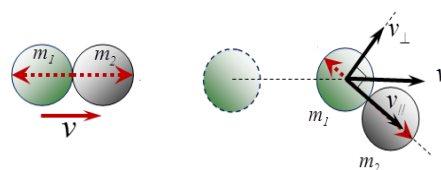


圖 1：(a) 一維彈性碰撞圖示。(b) 二維彈性碰撞向量分解圖示。

若上述碰撞體 $m_1$ 的初始速度不與兩者的質心連線重合，則此碰撞便由一維碰撞轉變成二維碰撞。根據向量分解的概念，我們可以任意選定座標系統將 $m_1$ 的初始速度向量 $\vec{v}$ 分解成兩個相互垂直的分量。選定兩碰撞體碰撞時的質心連線方向為其中一個座標軸，另一個座標軸則垂直於質心連線方向，則 $\vec{v}$ 可分解為 $\vec{v}_{\parallel}$ 與 $\vec{v}_{\perp}$ 兩分量，如圖1(b)所示。 $\vec{v}_{\parallel}$ 為兩碰撞體質心連線方向上 $m_1$ 的初始速度。在此方向上，兩者的碰撞行為可以再度視為先前所提的一維彈性碰撞：因碰撞體的質量相等，則碰撞後 $m_1$ 在此方向上的速度分量為零，而 $m_2$ 以 $m_1$ 的初始速度分量 $\vec{v}_{\parallel}$ 前進。

同理， $\vec{v}_{\perp}$ 為垂直於兩者質心連線方向的 $m_1$ 的初始速度。在此方向上，由於 $m_1$ 沒有碰撞到任何物體，因此「碰撞後」 $m_1$ 仍以原本速度 $\vec{v}_{\perp}$ 前進，而 $m_2$ 並未獲得(或損失)此方向上的速度分量，仍保持為零。

綜合以上論點，在兩碰撞體進行二維彈性碰撞之後， $m_1$ 具有末速度 $\vec{v}_{\perp}$ ， $m_2$ 具有末速度 $\vec{v}_{\parallel}$ ，因此兩者前進方向相互垂直。利用以上簡單且直覺的向量分解概念，我們即可輕易得到二維彈性碰撞後兩物體之運動方向將成 $90^\circ$ 的結論。

## 參、實驗架設與步驟

### 一、實驗設計理念

一維彈性碰撞實驗是一個經典的大學物理實驗。由於系統的運動被侷限在單一維度上，它的實驗設計概念極為簡單，僅需將兩碰撞體置於氣墊軌道上，並架設光電管、光

電計時器就可以完成實驗量測。但對於二維彈性碰撞來說，實驗的設計上就較為困難。主要原因是兩碰撞物體碰撞後的路徑無法事先預測，因此無法在其碰撞路徑上擺設光電管。另外若利用彈珠或是撞球進行實驗演示時，碰撞體除了滑動之外，同時伴隨著複雜的滾動行為而影響理論預測。因此在有關於碰撞的物理學上，二維彈性碰撞一直沒有一個較直觀的演示教學實驗。而碰撞後兩等質量物體運動方向將成  $90^\circ$  的結果，亦缺乏實驗證實。

近年來 Tracker 軟體的出現，對於動則須百萬元經費的高速攝影機及軟體才能研究的運動學，帶來新的研究方法。Tracker 軟體是一個建立於 Open Source Physics (OSP) Java 架構下的影像分析工具，由卡布里歐學院 (Cabrillo College) 的退休講師 Douglas Brown 所開發的免費軟體[5]。透過影片分析，這套軟體能將運動物體在不同時間下的空間位置進行數位化，因而解決運動物體軌跡無法預測之問題。換句話說，這免費軟體的出現，使得二維彈性碰撞的演示教學實驗設計出現了曙光。而另外一方面，我們利用便宜的桌上冰球玩具模組 (Air Hocker)[6] 作為二維彈性碰撞的氣墊平台 (如圖 2(a) 所示)，確保碰撞體在低摩擦力的條件下以純滑動的運動方式進行碰撞。

結合了以上的觀點，我們針對二維彈性碰撞的問題，設計了一個簡易演示的實驗。在此我們利用桌上冰球玩具模組，配合便宜但具有高速攝影功能的相機，同時使用公共授權軟體 Tracker 將數位影像轉換為可分析數據，驗證先前所列舉的理論結果。

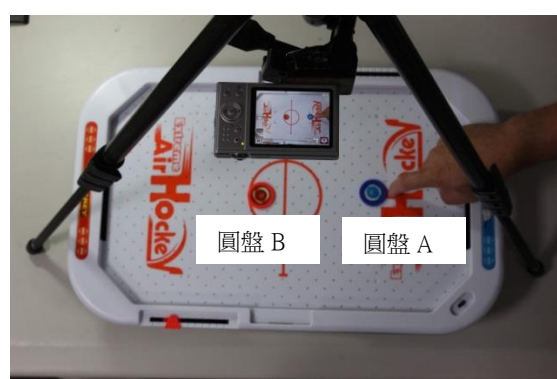


圖 2：(a) 實驗裝置圖。(b) 進行二維彈性碰撞實驗。

## 二、實驗所需之材料及軟體

1. 桌上冰球玩具模組 (以下簡稱氣墊平台) (如圖 2(a) 所示)。
2. 圓盤 A 與圓盤 B (作為碰撞體，該玩具模組本身即有附贈) (如圖 2(b) 所示)。
3. 具有高速攝影功能 (每秒至少可拍 120 張相片) 的相機。
4. 相機腳架及水平儀。
5. 電腦與公共授權軟體 tracker。

## 三、實驗操作步驟

1. 圖 2(a) 將實驗裝置裝設完成。
2. 利用水平儀確認氣墊平台的水平，以避免碰撞圓盤在稍後的實驗中受到其它分力的影響。同時確認相機是否水平。
3. 打開氣墊平台的開關，此時將有空氣由平台小孔噴出，產生低摩擦力的實驗環境。同時將碰撞圓盤放置其上，測試是否能在平台上順利滑動。

4. 設定相機的攝影模式為 120fps(每秒鐘 120 張相片)，按下攝影鈕，開始進行碰撞實驗的錄影。
5. 由一操作者將圓盤 A 彈出並射向圓盤 B (圖 2(b))，讓兩者進行二維碰撞。結束錄影，並將所拍攝的影片，利用公共授權軟體 tracker 進行分析[7]。
6. 將兩圓盤運動軌跡的數值匯出至 excel，計算並求得兩圓盤碰撞後的夾角(詳見肆、實驗結果之分析及討論)。
7. 改變圓盤 A 入射角度與速度，重複以上步驟並多次進行實驗，分析所得結果。

#### 肆、實驗結果之分析及討論

根據以上步驟，我們可以藉由 tracker 分析，得到兩圓盤在碰撞前後的運動軌跡，如圖 3(a)所示。這些運動軌跡的座標可以進一步匯出至 excel 以供定量分析。圖 3(b)顯示了碰撞後，圓盤 A 與圓盤 B 運動軌跡的水平座標  $x$  與垂直座標  $y$ 。其中  $No=1, 2, \dots, 10$  代表「碰撞後」軌跡點的

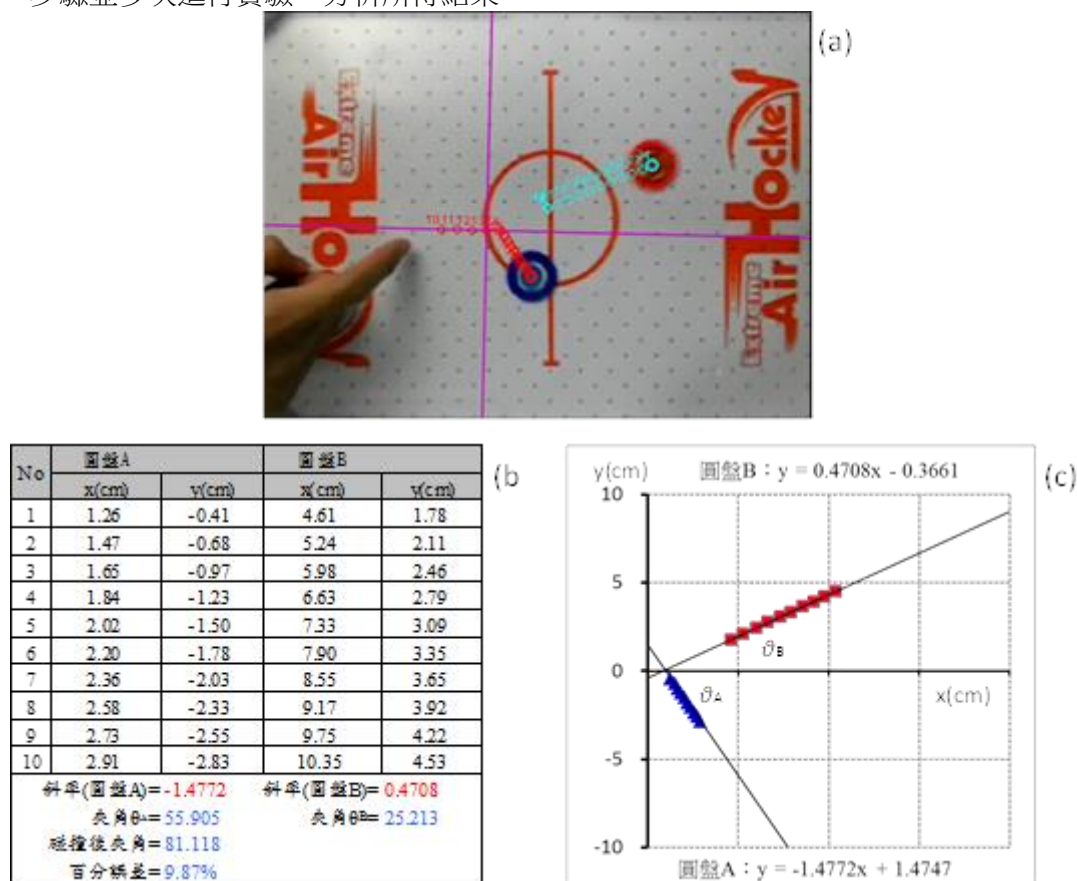


圖 3：二維彈性碰撞的運動軌跡、數據，以及分析結果。

標號，而每兩個鄰近軌跡點間的時間間隔為  $1/120$  秒。我們可以藉由這些座標在 excel 上畫出兩個圓盤的運動軌跡，並利用趨勢線以得到運動軌跡的趨勢方程  $y = ax + b$ ，其中

$a = a_A$  或  $a_B$ 。就圓盤 A 而言，其斜率  $a_A = -1.4772$ ，而圓盤 B 的斜率  $a_B = 0.4708$ ，如圖 3(c)所示。

圓盤的運動軌跡趨勢方程可以幫助我們



得到碰撞後圓盤與水平軸的夾角。根據趨勢方程，圓盤位移方向的單位向量可以表示為

$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(\hat{i} + a\hat{j}), \quad (1)$$

其中 $a = a_A$ 或 $a_B$ 。由方程式(1)我們可以得到碰撞後圓盤與水平軸的夾角

$$\theta = \tan^{-1}(|a|/1) = \tan^{-1}(|a|). \quad (2)$$

分別將 $a_A = -1.4772$ 與 $a_B = 0.4708$ 代入方程式(2)，可得到圓盤 A 與水平軸的夾角 $\theta_A = 55.905^\circ$ ，圓盤 B 與水平軸的夾角 $\theta_B = 25.213^\circ$ ，如圖 3(b)與 3(c)。換句話說，兩圓盤碰撞後的夾角為 $\theta = \theta_A + \theta_B = 81.118^\circ$ ，其與理論值 $90^\circ$ 的差值為 $\Delta\theta = 90^\circ - \theta = -8.882^\circ$ 。此實驗數值的百分誤差約為 9.87%。

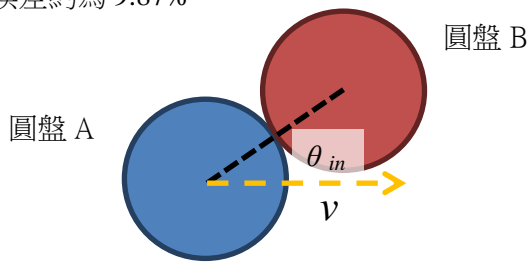


圖 4：定義入射角度 $\theta_{in}$

我們重複上述實驗數次，所得到的夾角 $\theta$ 大抵介於 $72^\circ \sim 82^\circ$ 之間。為了進一步分析討論，我們定義兩圓盤碰撞瞬間，圓盤 A 與圓盤 B 之中心連線與圓盤 A 速度方向的夾角定義成入射角度， $\theta_{in}$ ，如圖 4 所示。同時，我們定義 $\theta'_A$ 為圓盤 A 在碰撞後與水平軸夾角的「理論值」， $\theta'_B$ 為圓盤 B 在碰撞後與水平軸夾角的「理論值」。根據先前的理論，我們可以知道在理想情形下， $\theta'_B = \theta_{in}$ ，且 $\theta'_A = 90^\circ - \theta_{in}$ 。然而實際碰撞後的角度 $\theta_A$ 與 $\theta_B$ 與理論值各自存在誤差，因此分別定義兩個角度的誤差為 $\Delta\theta_A = \theta_A - \theta'_A$ ，以及 $\Delta\theta_B = \theta_B - \theta'_B$ 。如此我們便可在不同 $\theta_{in}$ 的條件下，將碰撞後的總角度差 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\theta_A$ 、與 $\Delta\theta_B$

紀錄在表 1。儘管這些數據並沒有明顯的規律性，其仍呈現了一些共通性： $\Delta\theta_A$ 與 $\Delta\theta_B$ 皆小於 0。換句話說，圓盤 A 與圓盤 B 皆偏離原本理論軌跡，且往水平軸靠攏。

表 1：在不同入射角度下，碰撞後的夾角差值。

$\theta_{in}(^\circ)$	$\Delta\theta(^\circ)$	$\Delta\theta_A(^\circ)$	$\Delta\theta_B(^\circ)$
26.325	-8.882	-7.770	-1.112
36.547	-14.100	-8.000	-6.100
37.853	-13.995	-7.659	-6.336
40.854	-8.627	-7.748	-0.979
45.124	-10.263	-7.937	-2.326
45.490	-10.991	-6.947	-4.044
54.344	-17.796	-14.034	-3.762
62.876	-17.261	-11.460	-5.801
64.824	-16.075	-9.820	-6.255
65.328	-14.029	-12.546	-1.483
65.623	-16.895	-10.485	-6.410
74.007	-16.201	-13.280	-2.921

事實上，上述碰撞後夾角 $90^\circ$ 的理論是基於圓盤進行「完全彈性碰撞」所推得的理想結果。然而在我們的實驗中，圓盤間的碰撞為「非完全彈性碰撞」，碰撞前後必伴隨著動能的損失。為了進一步了解實驗誤差的成因，我們可以利用動量守恆的概念與動能 $K = \frac{p^2}{2m}$ 等相關數學方程，推出在圓盤 B 初速為零且兩圓盤質量同為 $m$ 的條件下，進行「非完全彈性碰撞」前後的總動能變化 $\Delta K$ 遵守以下方程式

$$\Delta K = -\frac{p_A p_B}{m} \cos(\theta_A + \theta_B), \quad (3)$$

其中 $p_A$ 與 $p_B$ 分別為碰撞後圓盤 A、B 的動量大小。由該方程可知，若碰撞瞬間具有動能的損失( $\Delta K < 0$ )，則碰撞後兩圓盤的夾角 $\theta_A + \theta_B$ 必小於 $90^\circ$ 。這說明了非完全彈性碰撞造成的能量損失是造成碰撞後圓盤夾角小於 $90^\circ$ 的成因。而在實驗過程中，我們亦可看到圓盤在碰撞後產生明顯的轉動行為，這也會對碰撞後圓盤間的夾角產生影響。此外，表(一)的實驗數據同時展現一個有趣的現象： $|\Delta\theta_A| > |\Delta\theta_B|$ 。後續的研究方向，包

括力學模型的完備、摩擦力改變的影響、 $|\Delta\theta_A| > |\Delta\theta_B|$ 的形成機制，以及非完全彈性碰撞造成的影響，我們未來將以更精確的自製氣墊平台與自製碰撞圓盤(可改變碰撞面(圓盤側面)的材料)，進行研究。

我們要強調，儘管二維彈性碰撞的理論已在高中、大學課程中反覆出現，目前仍沒有直觀的演示實驗用來量化並驗證等質量物體進行二維彈性碰撞後的夾角為 $90^\circ$ 。而本文所提出的實驗構想、碰撞夾角計算方程式(1)與(2)，可以推廣至任何二維彈性碰撞系統的分析上。事實上，經過我們實驗分析，要得到 $90^\circ$ 的夾角是相當困難的：這是由於碰撞時的動能損耗與圓盤轉動造成的影響。儘管我們目前的實驗誤差落在 10%-20%，然而這是基於一個廉價的、摩擦無法降低的玩具氣墊平台所得到的結果。然而正是為使用廉價的氣墊平台，因此這個實驗模組具有演示教學上的優勢。我們期待藉由這樣直觀的教學演示實驗，能夠讓學生在課堂上眼見為憑，理解抽象理論所得到的結果。同時藉由後續的討論，讓學生了解誤差產生的可能成因。

## 伍、結論

本文提供了一個新的、完整的二維彈性碰撞教學策略。首先我們藉由一個直觀的理論分析，證明了在碰撞物等質量且其中一者起始處於靜止的條件下，碰撞後兩物體之運動方向將成 $90^\circ$ 。利用桌上冰球玩具模組佐以便宜易取得的高速攝影相機與 Tracker 軟體，該理論結果可以藉由演示實驗進行驗證，並引導學生了解誤差的成因。除此之外，二維彈性碰撞亦遵守動量守恆與動能守恆兩個定律。藉由本實驗系統與 Tracker 的分析，我們也可以驗證上述兩個守恆律。最後，由於我們提出的實驗模組價格便宜且容易取得，因此這個教學策略極具推廣上的潛力。

## 參考文獻

1. Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J., (1993) *Fundamentals of Physics*. Wiley, New York.
2. 蔡仲尼、林誠孝、羅煜聘、洪耀正、蔡振凱、楊勝州、吳添全、劉育松 (2013). **普通物理學(第二版)**，歐亞書局，台北。
3. 謝明君、翟大鈞、黃耿凌、江俊明 (2011). **普通物理(College Physics)**，高立圖書有限公司，台北。
4. Ng, C. K. (2008). Oblique and Head-On Elastic Collisions. *The Physics Teacher*, 46, 240-241.
5. Brown, D. (2013). Tracker Video Analysis and Modeling Tool, Tracker, <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>.
6. 亦稱作桌上曲棍球台。可於一般的玩具賣場，或利用網路購物平台購得。以下檢附兩個網路購物平台購買來源：  
1. <https://tw.buy.yahoo.com/gdsale/gdsale.asp?gdid=2607300>，或是  
2. <http://www.books.com.tw/products/N010270417>.
7. 楊仲準(2012). 應用於物理教學之影像數位分析技術。 **物理教育學刊**，13(1), 41-50。

## A New Teaching Strategy for Two-Dimensional Elastic Collisions

**Yao-Chen Hung, Han-Yang Cheng, and Chun-Ming Chiang\***

Physics Teaching and Research Center, Feng Chia University

\*cmchiang@fcu.edu.tw

### Abstract

A new teaching strategy is proposed for two-dimensional elastic collisions, including an intuitive theoretical explanation and a simple lecture experiment. In the lecture experiment, an Air Hocker serves as a frictionless surface, and a high-speed camera is used to record the trajectories of the colliding objects. The trajectories can be quantified by means of a free-software package, Tracker, for the purpose of further analysis. Based on the experiment, the colliding phenomena predicted theoretically can be demonstrated directly and easily in class. Teachers can therefore attract students' interest in the problems of two-dimensional collisions.

**Key words:** two-dimensional elastic collisions, tracker

