

以桌上型傅科擺來討論旋轉座標系中的運動

郭昱彤、袁如慧、曲宏宇*

國立中正大學 物理系

*e-mail: phyhyc@ccu.edu.tw

(投稿日期：民國 104 年 09 月 23 日，接受日期：105 年 07 月 12 日)

摘要：我們使用桌上型傅科擺來觀測在旋轉座標系中的運動情形，一個旋轉的平台可類比於旋轉的地球，透過無線訊號傳輸以及控制裝置的旋轉速度，紀錄單擺的不同路徑及質心位置。在這個實驗中，我們以方便的測量方式及在很短的時間內可觀察到兩個不同座標系之間的相對運動。

關鍵詞：傅科擺、科氏力

壹、前言

大約兩百年以前，在人們還不知道到底是太陽繞著地球轉，還是地球自己在轉時，有一名法國物理學家-傅科(Jean Bernard Léon Foucault)[1]在巴黎先賢祠架設了一個超巨型單擺，擺長有 67 公尺和重達 28 公斤的鉛錘，並在單擺下方擺置沙盤用來記錄單擺的路徑，然而隨著時間流逝，在經過兩、三次週期後人們發現這個巨大單擺的軌跡並不是在同一條直線上，而是有些位移，這顛覆了當時大家的認知。然而由於地球自轉週期太長又要減少空氣摩擦力的效應，當想要重複這個實驗，欲觀測到可以判讀的位移量或完整的花瓣圖形，則需要較長的時間及很巨大的單擺，在此報告中我們將利用自製的

桌上型傅科擺，在短時間內觀測旋轉座標系中的運動情形，可得到類似的週期性圖形。

貳、實驗設計

為了瞭解在旋轉座標系下的相互運動過程，我們製作了一個旋轉平台並於上方安置一固定長度單擺，用以簡化並縮短觀測相互運動過程所需的設備及時間。如圖一所示，這是一個 30x30 平方公分 x80 公分高的桌上型傅科擺，底座中央的 T 字型是一個培林的系統，可以從下面軸承的部分控制上方系統的轉速。

整個擺錘的重量由頂部平板承受，再分配到四支柱子，柱子下方各有一個由 2 公斤電子秤中取出的重量感應器。當擺錘位置開

始移動時，擺錘分配至四個重量感應器的力量都會不同，接著使用二維的求質心算法，便可定位出當下擺錘的位置。

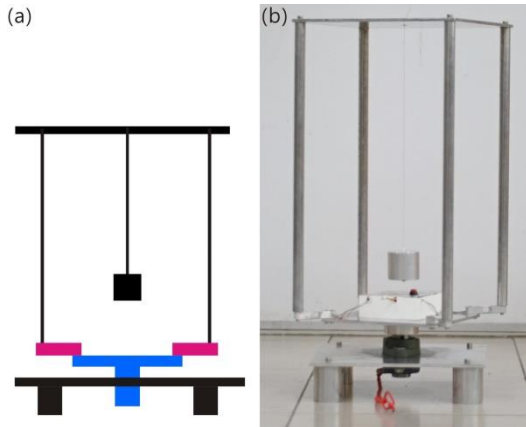


圖 1：(a)實驗裝置示意圖。(b)實驗裝置。

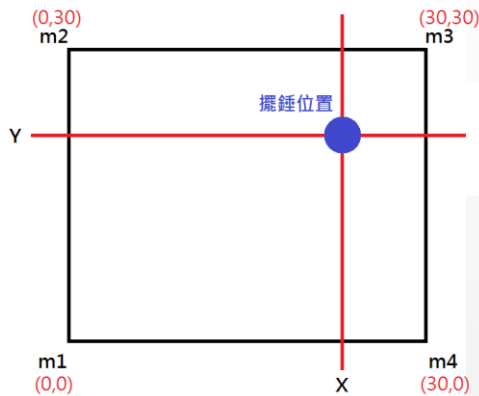


圖 2：測量擺錘位置的方法。

如圖 2，先標定其中一感應器為座標(0,0)的點，將重量感應器 3 跟 4 的讀數加起來除以總重乘以平板長度，即可得到 X 軸的位置，再將感應器 2 跟 3 的讀數加起來除以總重乘以平板寬度，即可得到 Y 軸的位置。

$$x = \frac{0 * (m1 + m2) + 30 * (m3 + m4)}{m1 + m2 + m3 + m4}$$

$$y = \frac{0 * (m1 + m4) + 30 * (m2 + m3)}{m1 + m2 + m3 + m4}$$

重量感應器測到的重量為柱子加平板加擺錘，為了準確追蹤擺錘的位置，我們在放上擺錘前必須先歸零，也就是在 MatLab 程式中將信號歸零，將柱子和平板平均分配到的重量扣除，使之後四個重量感應器測得的總重等於擺錘的重量。

線路部分如圖 3，重量感應器(Load cell)先連到類比數位轉換器(ADC)將類比信號轉換成數位信號，接著再傳入 Arduino 晶片以藍芽傳輸的方式傳到外界，最後我們使用電腦藉由 MatLab 撰寫程式及藍芽接收信號，並做處理。其中類比數位轉換器我們使用 Hx711 ADC 晶片，一片以一百元上下即可購得，可將重量感應器輸出之極小電壓訊號轉換成數位的克重資料。並且藉由晶片上 pin15 腳跳線至電源 VCC，該腳原本為連接至接地端 GND，將其斷路後，改連接至 VCC [2]，使 ADC 轉換速率可達 86 Hz (跳線前原轉換速率僅有 10 Hz)，又藍芽速率 baud rate 改成 38400 BPS，使我們接收信號速率提高。

先前實驗方式是由每只重量感應器分別以 OP07 運算放大器放大三級獲得 1000 倍的放大電壓訊號，過濾高頻訊號後，再接入資料擷取器 DAQ 連入電腦運算，此實驗方法可獲得相同實驗結果，亦能藉由 DAQ 獲得到更高的取樣速率，在同學練習製作放大電路及濾波等學習過程是個相當好的題材。但由於實體接線接入電腦緣故，使下方盤面的旋轉圈數上受到限制，因此在此次實驗報告中結合 Arduino 晶片及藍芽傳輸方式，改以無線的方式將數位訊號傳出實驗系統，可得到更方便的結果。

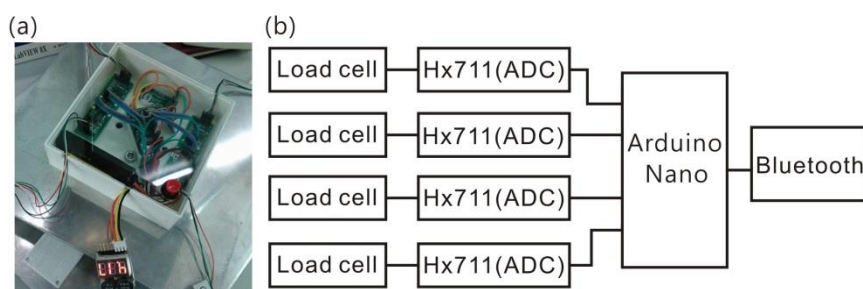


圖 3：(a)實驗架設接線。(b)線路示意圖。

參、原理

在我們的認知中，單擺一來一往應該會在同一條直線上，但如果單擺建立在一個旋轉運動座標系上，結果可就不同於一般所見了。

現在我們定義兩個週期， T 是單擺來回擺動的週期， T_0 是系統旋轉的週期，當 T_0/T 為 n 倍的時候，單擺週期的二分之一也會等於系統週期的 $2n$ 分之一，也就是說，當單擺走了半個週期的時候，系統正好也旋轉了 $360/2n$ 度。

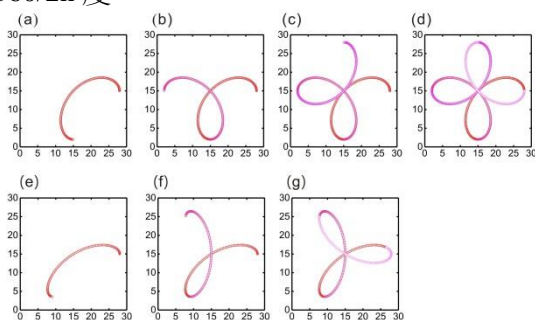


圖 4：單擺運動模擬圖，(a)~(d)為 $n=2$ 的結果，(e)~(g)為 $n=3$ 的結果。

以下做個簡單的動態圖來模擬說明：

$T_0/T=2$ ，當單擺經過第一次半週期時，系統剛好轉了 90 度，由圖形上看就是半週期的第一點及最後一點分別與中心連線之夾角呈 90 度角(如圖 4(a))，當單擺完成第一次完整的週期時，系統又再轉了 90 度，這一次末點與中心的連線正好和原本的出發方向呈

180 度直線(如圖 4(b))，這個 180 度其實就是系統轉了兩次 90 度造成單擺起點和終點位移的原因。當單擺走完兩次週期，系統也完整的繞完一圈時，我們就會得到 4 葉花瓣圖形了(如圖 4(d))。

$T_0/T=3$ ，當單擺經過第一次半週期時，系統剛好轉了 60 度，由圖形上看就是半週期的第一點及最後一點分別與中心連線之夾角呈 60 度角(如圖 4(e))，連續三次，正好回到了原本的出發點(如圖 4(g))。注意！此時系統只轉了 180 度，當系統經歷了完整的 360 度之後，會發現單擺的軌跡其實是走了兩層重疊的 3 葉花瓣。

在此，這路徑正好符合玫瑰線的公式 $r = a * \cos(n\theta)$ ，其中 n =奇數時，花瓣為 n 瓣， n =偶數時，花瓣為 $2n$ 瓣。

肆、實驗過程與結果

首先，在開始之前必須先知道這個單擺的週期，因此先讓系統靜止不轉動，只有單擺以直線來回擺盪(如圖 5(a))，取出單一隻腳的重量訊號變化對時間做圖(如圖 5(b))，再拿去做傅立葉頻譜分析，即可得到此單擺擺動的頻率為 0.76 赫茲(如圖 5(c))，週期為 1.315 秒。

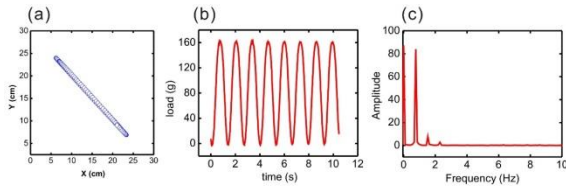


圖 5：(a)單擺路徑。(b)重量感應器之讀數。(c)單擺之頻率分析。

接著進行實驗，首先嘗試做 $T_0/T=2$ 的情況，可是我們發現當系統開始轉動的時候，信號開始出現不穩定的現象(如圖 6(d))，我們先檢查其中一隻腳的信號由重量變化對時間做圖得到圖 6(a)，得知果然有意外的雜訊滲入。為了解決這個問題，我們將信號做了頻譜分析(如圖六(b))，再使用低通濾波將高頻項都去掉，使重量變化回到滑順的波形(如圖 6(c))，將四組重量訊號做相同的處理後，馬上就可以得到了理想的花瓣紋路了(如圖 6(e))。這裡我們使用的數位濾波方式並非直接使用現成的低通濾波函式，而是將分別四組電壓訊號先做傅立葉轉換，再把高於 2 Hz 部份訊號震幅強度設為 0，接著做反傅立葉轉換回到時間頻域，為的是不會把原本應有的低頻訊號震幅被低通濾波函式稍微的減小。其中，我們不希望出現的雜訊其實是單擺的固定點與平板上的支點摩擦或晃動造成的。

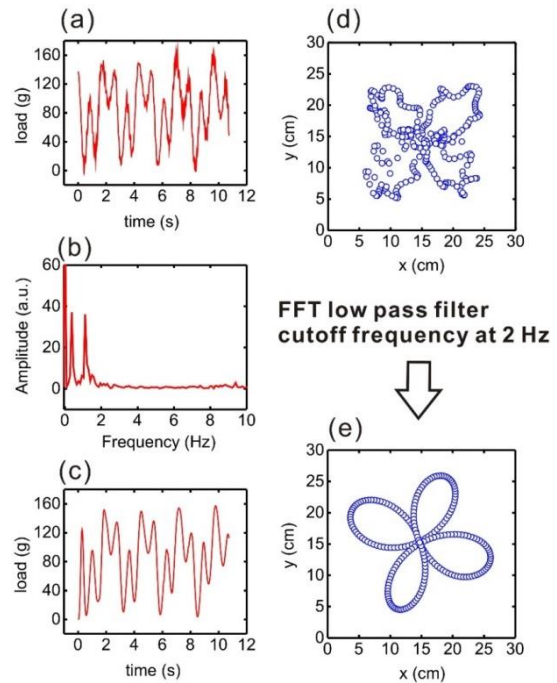


圖 6：實驗訊號之處理過程。

以下做了五組實驗，分別是系統旋轉的週期約為單擺來回擺動週期的 2、3、4、5、7 倍。由圖 7 之比較可以看出實驗結果幾乎完整地符合了原始推論，往後便可由得到的花紋圖形反過來推測兩系統之間的相對關係。

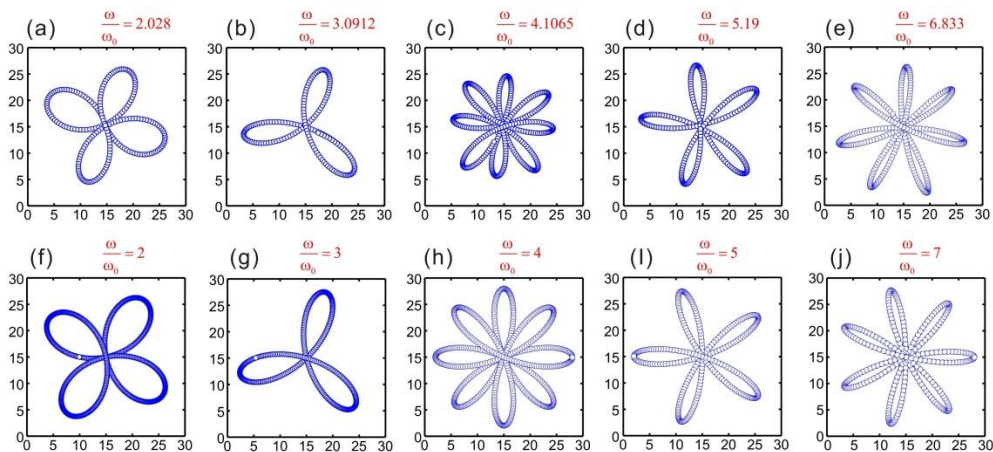


圖 7：實驗數據與理論模擬比較，其中(a)~(e)為實驗數據，(f)~(j)為理論模擬圖形。

伍、結論

物理課本中介紹科氏力常以傅科擺來說明地球自轉，然而一般傳統實驗演示需要單擺藉由較長的時間以及相對大的空間來表達這轉動的角度。本次實驗報告中我們製作了這個桌上型傅科擺可以在短時間內明顯地觀測出週期性花瓣圖形，在物理演示上能更容易幫助同學瞭解對在旋轉座標系上的相對運動，在實驗實做上更希望讓同學對訊號處理，數位濾波，獲得二維平面質心位置等實驗技巧有所助益。

致謝

感謝科技部專題研究計畫經費補助（計畫編號：NSC-102-2112-M-194-008-MY3）。

參考文獻

1. Tai L. Chow. 1995. Classical Mechanics. 1st ed. 378-381. New York: Wiley.
2. 海芯科技。HX711 晶片技術文件。網址：
https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Sensors/ForceFlex/hx711_english.pdf。

Using a table-top Foucault pendulum to investigate the relative motion in a rotating frame

Yu-Tong Kuo, Ru-Hui Yuan, Hong-Yu Chu^{*}

Department of Physics, National Chung Cheng University

^{*}e-mail: phyhyc@ccu.edu.tw

Abstract

We introduce a wireless table-top Foucault pendulum to investigate the traveling motion on a rotating reference frame. A rotating stage is analogous to the rotating earth. By controlling the rotational speed of the device, the different routes of the pendulum are revealed. In this experiment, we observe the relative motion of two different reference frames in a short time.

Key words: Foucault pendulum, Coriolis force