物理教育學刊
2016, 第十七卷第二期, 15-24

Chinese Physics Education
2016, 17(2), 15-24

10.6212/CPE.2016.1702.02

機翼所受揚力的簡單推導

周鑑恆

萬能科技大學　航空暨工程學院
chou0717@gmail.com

（投稿日期：民國 105 年 08 月 09 日，接受日期：105 年 10 月 24 日）

摘要：本文根據多質點系統理論以及動量變化與衝量之間的關係，經過創新的簡單分析，推導出機翼所受揚力的公式，並說明揚力係數的意義。

關鍵詞：揚力、揚力係數

壹、 前言

空氣因為很容易壓縮，又具有黏滯性，用白努利定律解釋機翼的揚力，其實並不適當[1]。但解釋與導出揚力的資料少之又少，一般物理教科書常僅提及揚力，或僅給出揚力的公式，而不闡述其推導過程[2-6]。而白努利定律在分析流體因時常被濫用，使得流體力學顯得難以掌握，而本文主要以基本的牛頓運動定律出發，來解決有關流體的問題，文中利用多質點系統理論為依據簡單推導即可得到與一般教科書相同的揚力公式，藉此提供讀者一個簡易瞭解揚力公式推導過程及應用在求機翼所受之揚力的方法。

貳、 多質點系統理論

選定一個系統，見圖 1，系統中有許多質點（就像將空氣分割成的無數小塊）。

作用在系統中某質點（標示為 i）的力可分為：系統之外的因素造成的力（標示為 $F_{i,ext}(t)$），以及系統中其他質點對 i 質點的作用力，（標誌為 $\vec{F}_{i,j}(t)$）。而此質點 i 的加速度可以寫為 $d\vec{v}_i/dt$。

根據牛頓第二運動定律，可得：

$$m_i \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{F}_{i,ext}(t) + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{i,j}(t)$$

$$\Rightarrow m_i d\vec{v}_i(t) = d\vec{P}_i(t) = \left(\vec{F}_{i,ext}(t) + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{i,j}(t)\right)dt \tag{1}$$

其中：$\vec{P}_i(t) = m_i\vec{v}_i(t)$，為該質點的動量。

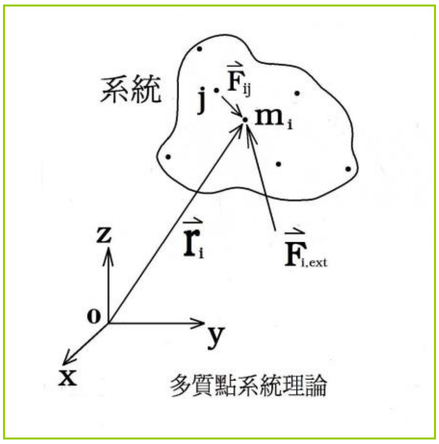

圖 1：此多質點系統中各質點間的作用力可能相當複雜

把這整個系統的所有質點$(i = 1,2,3...)$的運動方程式都寫出來，並且將整個**系統中所有質點的運動方程式加起來**，即得：

$$\sum_i d\vec{P}_i(t) = \sum_i \left(\vec{F}_{i,ext} + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{i,j}(t)\right)dt = \sum_i \left(\vec{F}_{i,ext}(t)dt\right) + \sum_i \left(\sum_j \vec{F}_{i,j}(t)\right)dt$$

$$= \left(\sum_i \vec{F}_{i,ext}(t)\right)dt \tag{2}$$

逐項寫出上述方程式最右項的每一項，並相加起來，根據牛頓第三運動定律，會發現方程式最右項為零。

再將前式從某個時間起點(t_o)到某個時間終點(t)積分起來，

$$\int_{t_0}^{t}\sum_i d\vec{P}_i(t) = \sum_i \int d\vec{P}_i(t) = \int_{t_0}^{t}\left(\sum_i \vec{F}_{i,ext}(t)\right)dt = \sum_i \int \vec{F}_{i,ext}(t)dt \tag{3}$$

可得：

$$\sum \vec{P}_i(t) - \sum \vec{P}_i(t_0) = \sum_i \Delta\vec{P}_i = \vec{P}_{tot}(t) - \vec{P}_{tot}(t_0) = \int_{t_0}^{t}\left(\sum_i F_{i,ext}(t)\right)dt \tag{4}$$

(4)式中值得注意的是：(1.) 外力 $\vec{F}_{i,ext}(t)$ 並不一定作用在每一個質點。 (2.) 外力 $\vec{F}_{i,ext}(t) = f_i(t)$，可能在不同的時間點、持續不同的時間，作用在不同質點。也就是說：作用在各個質點的外力 $\vec{F}_{i,ext}(t)$，有些始終為零，有些部分時間為零，但所有 i 的 $\Delta\vec{P}_i$ 有可能都

不為零。而此系統所有質點的總和動量在某段時間的變化量，等於不同的某些質點所受不同時間函數的外力對該段時間積分。換言之：無論系統為剛體或是流體，甚至只是一群有關、或無關的粒子，也不論系統內部各部分（質點）之間的作用力為何，整個系統所有質點的總動量在『**這段時間**』的變化量，等於：作用在系統中某些質點、在不同時間發生、持續時間也不同的所有外力，對『**這段時間**』之積分。

參、 機翼所受的揚力

將多質點系統理論應用在求機翼所受之揚力。步驟大概為：選定系統；找出系統所受的外力，並簡化所有外力為機翼施加系統的動態力（亦即作用在機翼上的揚力之反作用力）；巧妙證明：系統在一小段時間間隔之**總**動量的**變化量**，等於機翼後方不遠處一層空氣的**動量**。最後利用(4)式，即可算出揚力。

甲、選定系統：

機翼飛行時會引起一定範圍的空氣流動與壓力變化。因此選定圖 2 所示系統的範圍必須很大，外邊界附近的空氣完全不受機翼之影響而始終靜止。**注意：此系統是指外邊界之內、機翼之外的空氣。**

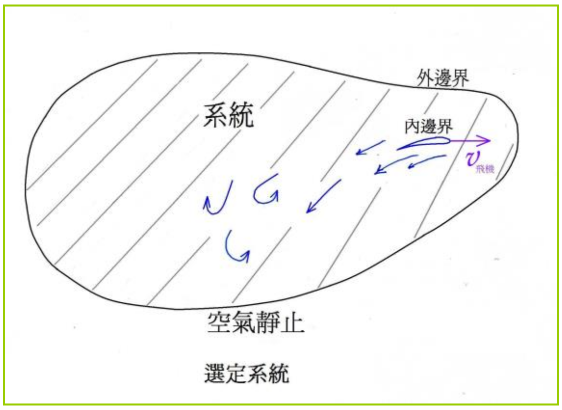

圖 2：此多質點系統是指外邊界以內，內邊界以外的空氣。

乙、簡化系統所受之外力：

(一) 因為系統外邊界附近的空氣始終不被擾動，外邊界之外的外界空氣作用在系統的壓力，與沒有機翼在內部擾動時完全相同，換算成的力總和，等於外邊界所受的空氣浮力（**方向向上**），即等於**系統**（注意挖掉機翼的部分）**本身空氣之重量**，加上**機翼體積的空氣重量**。

(二) 系統（外邊界內挖掉機翼部分的空氣）所受的重力，即**系統本身空氣的重量（方向向下）**。

(三) 機翼（系統內邊界）施加在系統上的外力，可分成：(a)機翼所受之空氣浮力的反作用力，作用在系統空氣上，**方向向下，大小等於機翼體積的空氣重量**；以及(b)機翼所受揚力

之反作用力（作用在系統空氣上）。

系統所受的這三項外力向量相加之後，可得：淨外力**為機翼施加在系統上之『揚力的反作用力』**。因此，揚力定義為：扣除靜止時系統空氣作用在機翼上不變的"浮力數值"之後，機翼所受系統空氣之力。此**機翼所受揚力之反作用力，**作用在系統一段時間Δt，就會造成系統**總動量之變化量**。

又因為揚力沒有理由會隨時間變化，必為不變的某個定值，即

$$\left|\sum_i \vec{F}_{i,ext}(t)\right| = \left|-\vec{F}_{\mathrm{L}}\right| \tag{5}$$

$\vec{F}_{\mathrm{L}}$ 為機翼所受向上的揚力。因此：

$$\int_{t0}^{t}\left(\sum_i \vec{F}_{i,ext}(t)\right)dt = \int_{t0}^{t}\left(-\vec{F}_L\right)dt = \left(-\vec{F}_L\right)\Delta t = \sum_{i\in\text{整個系統}} \vec{P}_i(t) - \sum_{i\in\text{整個系統}} \vec{P}_i(t_0) \tag{6}$$

丙、緊接著要計算：從初始時間 t_o 到終了時間 t，系統的總動量變化量！

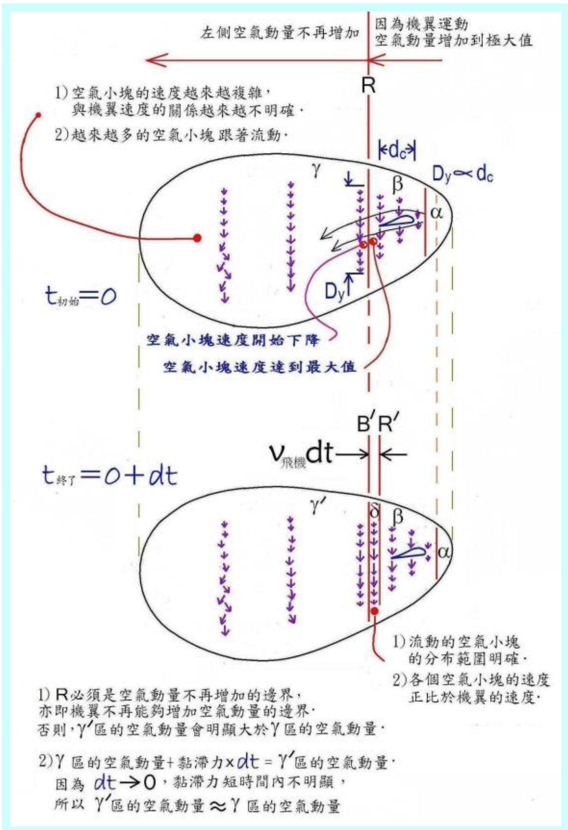

圖 3：計算從初始時間t_0到終了時間t，被分成 α、β、γ、δ 等區域的系統之總動量變化。

見圖 3，其中：$\sum_i \vec{P}_i(t)$代表某時刻t 系統中所有小塊空氣動量的總和，可以再分為幾

部分，即：

$$\sum_{i}^{系統}\vec{P}_i(t)=\sum_{i}^{\alpha部}\vec{P}_i(t)+\sum_{i}^{\beta部}\vec{P}_i(t)+\sum_{i}^{\gamma部}\vec{P}_i(t)\ldots=\vec{P}_\alpha(t)+\vec{P}_\beta(t)+\vec{P}_\gamma\ldots \tag{7}$$

時間為 t_o 時，系統的總動量為：

$$\sum_i \vec{P}_i(t_0)=\vec{P}_\alpha+\vec{P}_\beta(t_0)+\vec{P}_\gamma(t_0) \tag{8}$$

其中：**系統在 α 區域的空氣**，因為尚未受到機翼擾動：$\vec{P}_\alpha=0$。**系統在 β 區域的空氣**，因為正在受機翼擾動導流，在此 t_o 瞬間，

$$\vec{P}_\beta(t_0)=\vec{f}(t_0) \tag{9}$$

系統在 γ 區域的空氣，因為已不再受機翼擾動，$\Delta\vec{P}_\gamma(t_0)\approx 0$。

時間為 t 時，系統的總動量（見圖 3）為：

$$\sum_i \vec{P}_i(t)=\vec{P}_\alpha+\vec{P}_\beta(t)+\vec{P}_{\gamma'}(t)+\vec{P}_\delta(t) \tag{10}$$

其中：$\vec{P}_\alpha=0$，$\Delta\vec{P}_\alpha=0$。系統在新的 β 區域的空氣因為正再受到機翼擾動導流，沒有任何理由，說明在 t 和 t_0 時，β 區域和新 β 區域的空氣的流動情形會不相同，因此，在此瞬間 t，$\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$。

$$\vec{P}_\beta(t)=\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0) \tag{11}$$

系統在 γ 區域 (亦即後來的 γ' 區域) 的動量短期內不再變化，但**因為系統內部各小塊氣體之間的作用力，** γ 區域內空氣流動的情形則會隨時間變化，後來的 γ' 區域內有更多的空氣小塊流動，流動的方式也更為複雜。

見圖 3，R 邊界是人為選定的邊界，目的在簡化問題。R 邊界之後，機翼不再能夠使的空氣動量增加，否則 dt 或 Δt 之後，B' 邊界(即原來的 R 邊界)後面的 γ' 區域之空氣動量，因機翼擾動，將明顯大於原 $t=0$ 時 R 邊界後的 γ 區域空氣之動量。就無助於簡化問題了。選定 R 邊界，讓 γ' 區域的動量幾乎等於 γ 區域的動量，$\vec{P}_\gamma\approx C\approx\vec{P}_{\gamma'}$。

但在終了時間 t 時，系統中多了 δ 區域的空氣動量（只注意 z 分量）：

$$\vec{P}_\delta(t)=\sum_{n}^{\delta}\vec{P}_n(t)=\sum_{i}^{\delta}m_i v_i(t)(-\hat{z}) \tag{12}$$

而 δ 區域的空氣已經不再受機翼擾動而增加動量。由此可知：

$$\sum_i \vec{P}_i(t)-\sum_i \vec{P}_i(t_0)$$

$$= \left(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta(t) + \vec{P}_\delta(t) + \vec{P}_{\gamma'}(t)\right) - \left(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta(t_0) + \vec{P}_\gamma(t_0)\right)$$
$$= \vec{P}_\delta(t) = \left(-\vec{F}_L\right) \bullet \Delta t \qquad (13)$$

丁、 δ **區域如何認定，為何要** $\Delta t \to dt$ ？

Δt 時間間隔長了之後，原來 γ 區(即 γ' 區域)的空氣流動的情形會越變越複雜，δ 區與 γ' 區，就有可能**因氣流流動**而發生動量交換，而使 γ' 區與先前 γ 區的動量相差較大。

此外，見圖 3，縱使從 R 邊界到 B' 邊界的過程 ($t = 0 \to \Delta t$)，在 R 至 B' 邊界有某種未知的力 $F_{unknown}$，則**因為未知的力而造成的動量變化量**應為 $\vec{F}_{unknown}\Delta t$ 。如果：$\Delta t \longrightarrow dt \approx 0$ ；再加上，僅僅經過 dt 極短時間，$F_{unknown}$ 尚不明顯，$\Rightarrow \vec{F}_{unknown}\Delta t \to 0$；$\gamma'$ 區域的動量 $=\gamma$ 區域的動量 $+ \vec{F}_{unknown}\Delta t \approx \gamma$ 區域的動量，所以：B' 要盡可能接近 R' 邊界，即：$\Delta t \longrightarrow dt \approx 0$ 。

戊、 **如何計算** δ **區域的空氣動量**。

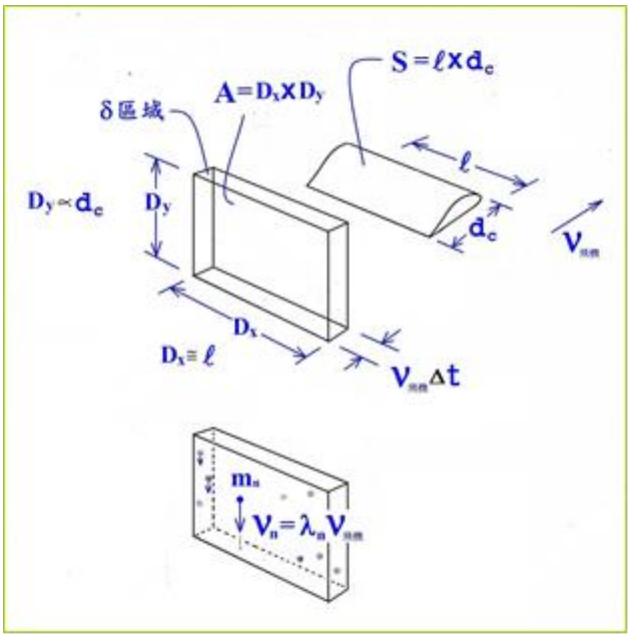

圖 4：計算 δ 區域的空氣動量

此外，只要 $v_{飛機}dt$ 相當薄，dt 是相當短的時間，則：

(一) δ 區域的範圍很明確。因為 δ 區域的空氣才剛剛脫離機翼影響的範圍，所以，δ 區域的空氣的範圍，應差不多等於單純機翼所影響的範圍，δ 區域空氣的範圍（見圖 4）就大概是：

$$\delta\text{區域範圍} = D_x \times D_y \times v_{\text{飛機}} dt \tag{14}$$

其中：D_y 正比於機翼寬度（弦長），D_x 正比於機翼長度；厚度極薄$\approx v_{\text{飛機}} dt$

(二) δ 區域內各空氣小塊的速度也很明確，各空氣小塊 n 的速度，都應該與機翼之速度成正比，不同位置的空氣小塊 n 的速度與機翼之速度的比例 λ_n 不同，不同位置空氣小塊 n 的速度即可寫成：

$$v_n = \lambda_n v_{\text{機翼}} \tag{15}$$

比較在各區空氣的動量，已經知道**整個系統**的**『動量變化量』**，等於 δ **區域**的空氣**『動量』**。

$$\Delta\vec{P}_{\text{整個系統}} = \vec{P}_{\delta} = \sum_{\text{n}}^{\delta} m_n v_{\text{n}} (\text{-}\hat{z})$$

$$= \sum_{n}^{\delta} m_n \lambda_n v_{\text{飛機}} (-\hat{z}) = M_{\delta} \tilde{C} v_{\text{飛機}} (-\hat{z})$$

$$= \rho A v_{\text{飛機}} \Delta t \cdot \tilde{C} v_{\text{飛機}} (-\hat{z}) = \frac{1}{2} \rho v_{\text{飛機}}{}^2 \, 2\tilde{C} A \Delta t (-\hat{z})$$

$$= \frac{1}{2} \rho v_{\text{飛機}}{}^2 SC(-\hat{z}) \Delta t = -\vec{F}_L \bullet \Delta t \tag{16}$$

即

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho v_{\text{飛機}}{}^2 SC(\hat{z}) \tag{17}$$

其中：見圖 4，在 δ 區域中空氣的總質量，等於未被擾動的空氣密度 ρ 乘以 δ 區域體積，即：

$$M_{\delta} = \sum_{n}^{\delta} m_n = \rho A v_{\text{飛機}} \Delta t \tag{18}$$

$\tilde{C}$ 的定義為：

$$\tilde{C} = \frac{\sum_{n}^{\delta} m_n \lambda_n}{\sum_{n} m_n} \tag{19}$$

δ 區域截面 $\mathrm{A} = D_x \times D_y$； 機翼面積 $\mathrm{S} = l \times d_c$。$\delta$ 區域截面和機翼面積成正比，於是揚力係數為：

$$C = \frac{2A\tilde{C}}{S} = \frac{2D_x D_y}{ld_x} \times \frac{\sum_{n}^{\delta} m_n \lambda_n}{\sum_{n}^{\delta} m_n} \tag{20}$$

δ 區域截面 A 和機翼面積 S 成正比。

肆、 結論

從(20)式可知：揚力係數 C ，正比於 A（機翼引起空氣擾動的截面）與 S（機翼面積）的比值。機翼引起空氣擾動的截面越大，引起更多空氣向下流動，揚力係數就越大。機翼向下導流的效果越好，即每一小塊空氣的 λ_n 值都能越大（ $\tilde{C}$ 就越大），揚力係數也就越大。從(20)式可知：機翼所受的揚力，正比於飛機空速的平方、空氣密度、揚力係數以及機翼面積：

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho v_{飛機}{}^2 SC(\hat{z})$$

此結果與教科書常見的結果完全一致。

致謝

感謝科技部經費支持（計畫編號 104-2511-S-238-001-）。

參考文獻

1. https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/downwash.html
2. http://web.mit.edu/16.00/www/aec/flight.html
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Lift_(force)
4. D. Halliday, etc., Fundamentals of Physics, 4th ed., E4-2, 1993, JohnWiley&Sons, Inc.
5. A. Giambattista, etc., College Physics, 2th ed, P 330, 2007, The McGraw Hill companies, Inc.
6. L. A. Bloomfield, The Physics of Everyday Life, 4th ed., P 206, 2010, John Wiley&Sons, Inc.

An Easy Derivation of the Lifting Force

Chien-Heng Chou
College of Aviation and Engineering, Vanung University
chou0717@gmail.com

Abstract

Using an innovatively simplified method, we derive the lifting force formula according to the theory of many particles system and the impulse concept. Therefore, we explain the physics meaning of lift coefficient.

Key words: lifting force, lift coefficient

周鑑恆