

簡諧運動教學實驗設計

江俊明* 洪耀正 鄭翰陽

逢甲大學 物理教學研究中心
*通訊作者：cmchiang@fcu.edu.tw

(投稿日期：民國 105 年 09 月 20 日，接受日期：105 年 10 月 25 日)

摘要：在普通物理課本討論簡諧運動的章節中，利用質點作等速率圓周運動的投影來描述簡諧運動是常見的方法。有別於一般以動畫描述的方式，在此我們介紹一個新的實驗設計，方法是利用便宜的高速攝影相機與公共授權軟體 Tracker，紀錄並分析圓周運動物體的水平運動軌跡。透過這樣的教學實驗，能夠讓學生更容易了解關於簡諧運動的物理知識，同時也可以引起學生的學習興趣，並藉此了解等速率圓周運動的投影與簡諧運動之間的數學關係。

關鍵詞：Tracker、簡諧運動

壹、前言

簡諧運動在物理課程上是一個相當重要的主題，它也是一種既簡單又基本的機械振動。也就是說物體運動時，在任何一瞬間，其加速度與位移成正比且方向相反。日常生活中像鐘擺、不斷回擊的桌球都是常見的振盪運動，簡諧運動可以看成是振盪運動的特例，只要其運動軌跡滿足 $\cos \theta$ 或 $\sin \theta$ 的形式，像彈簧與小角度單擺的周期性運動都是此類運動。

有關於簡諧運動的原理介紹，在許多普通物理課本都有很詳盡的介紹，由於物體在做簡諧運動期間其恢復力與位移成正比且方向相反，通常可以依此關係式，再利用牛頓運動定律，列出數學等式，對它進行求解[1-3]，而它的解是簡單又完美的形式，其位移、速度、加速度解的型態均與三角函數中的 $\cos \theta$ 或 $\sin \theta$ 的形式有關，不過使用這個方法的求解方式，對於學生而言要了解其結果，則同學必須具備簡易微積分與解微分方程的基本能力。所以這種求解方式對於大學生的學習是較可能實施的，也因此在大學的普通物理課程就根據此原理來設計實驗課程，像研究物體在彈簧系統中的簡諧運動即是[4]。

針對於高中生學習簡諧運動而言，要擺脫較為複雜的原理計算，運用質點做等速率圓周

運動在其直徑上的投影現象，來分析簡諧運動的運動的位置、速度、加速度與時間的特性，是一個不錯的教學方式。這種利用參考圓的投影現象來描述簡諧運動，除了可以讓高中生不用處理複雜數學的好處外，也可以進一步了解簡諧運動的運動模式。等速率圓周運動是一個二維空間的運動，簡諧運動是一維空間的運動，所以要設計一個描述其相關性的實驗並不容易，因此描述其相關性的動畫也就因應而生[5-6]。

公共授權軟體 Tracker[7-8]的追跡功能，可將二維空間的運動與一維空間的運動連結起來，有鑑於此，我們利用拍攝影片及軟體 Tracker 的分析，設計了一個等速率圓周運動的投影來描述簡諧運動的實驗，藉此提供一個實驗設計，來取代動畫方式的方法。

本文章首先介紹等速率圓周運動與簡諧運動之關係的理論分析，並設計相關的實驗。而在接下來的章節中，我們也將逐步介紹這個實驗架設與步驟，並驗證其實驗結果與理論的一致性。

貳、理論分析：等速率圓周運動與簡諧運動之關係

在一般大學的普通物理課程中，有關於簡諧運動的問題，我們通常是利用其恢復力 \vec{F} 與位移 \vec{x} 的關係式 $\vec{F} = -k\vec{x}$ ，以及牛頓第二運動定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 來推導出 $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ 的方程式，並解此二階齊次微分方程式，得到其解為 $x(t) = R \cos(\omega t + \varphi)$ 的形式，其中 ω 為此運動的角頻率(angular frequency)， $\omega t + \varphi$ 稱為相位角(phase angle)， φ 為相位常數(phase constant)。此方法的數學型態雖然很完美，但對於大學一年級的學生而言，在其數學基礎尚未打好根基下，要完全了解其含意，也只有少數程度較好的學生能做到。在高中時期解釋簡諧運動的相關數學式，利用質點做等速率圓周運動在其直徑上的投影現象，來分析簡諧運動就是一種較易理解的教學方法。其原理如下：

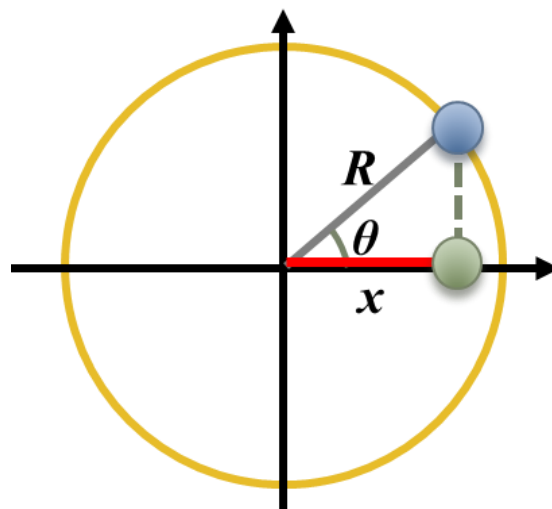


圖 1：利用參考圓求得簡諧運動的位移數學式

簡諧運動教學實驗設計

首先讓我們考慮一質點，以逆時針方向做等速率圓周運動，其圓周半徑為 R ，旋轉速率 v ，向心加速度大小 a_c ，則此質點作等速率圓周運動在其直徑上的投影運動情形恰為簡諧運動。從圖 1 中的觀察，我們很快地就可以寫下半徑 R 與位移 x 的數學關係式

$$x(t) = R \cos \theta \quad (1)$$

若考慮角頻率及相位角，則半徑 R 與位移 x 的數學關係式可寫成

$$x(t) = R \cos \theta = R \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

其中 R 亦為簡諧運動之振幅，角頻率 $\omega = 2\pi / T$ ， T 為旋轉週期，同時也是簡諧運動的週期。

而在圖 2 中，我們可看到做等速率圓周運動的質點的速率 v ，其速率的水平分量 v_x 恰為簡諧運動的速度大小，而

$$v_x(t) = -v \sin \theta = -v \sin(\omega t + \varphi) = -R\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

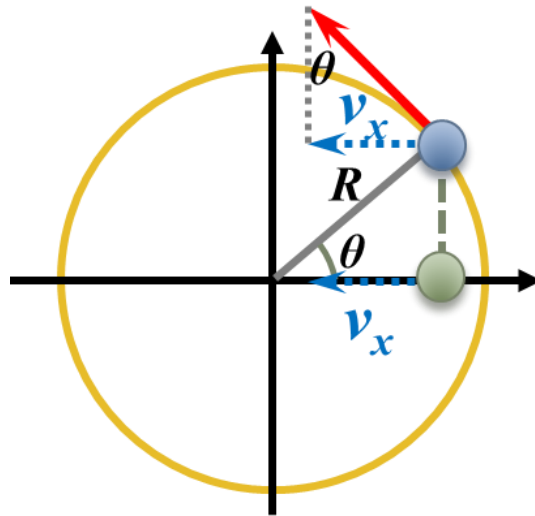


圖 2：利用參考圓求得簡諧運動的速度數學式

相同的在圖 3 中，我們也可藉由向心加速度的水平分量，找到簡諧運動的加速度

$$a_x(t) = -a_c \cos \theta = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

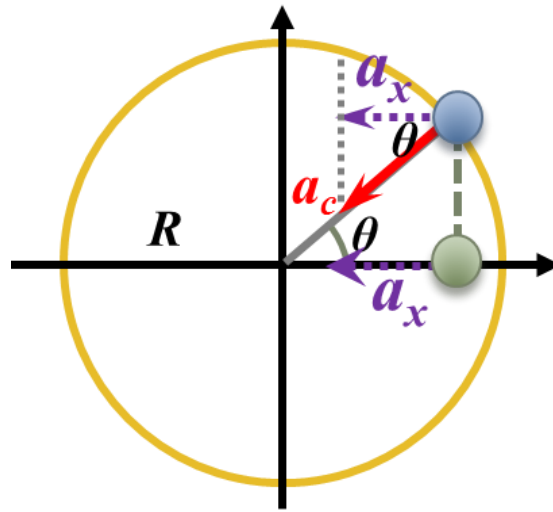


圖 3：利用參考圓求得簡諧運動的加速度數學式

從以上的分析可以了解到，在簡諧運動中的位移、速度、加速度的數學型態均與 $\cos \theta$ 或 $\sin \theta$ 有關。此理論的說明雖然簡單明白，但是要設計其相關實驗卻不容易。因為簡諧運動是屬於一維空間的運動，而等速率圓周運動是二維空間的運動，也因此在大部分的相關教學設計上，均以動畫的方式呈現[5]。而本文將利用公共免費授權軟體 **Tracker**，設計一個連結簡諧運動與等速率圓周運動的實驗，我們並且將分析實驗結果，藉此實驗讓學生除了動畫以外，可以真正的從實驗了解到簡諧運動的數學型態與等速率圓周運動的關係。

參、實驗架設與步驟

一、實驗設計理念：

一維簡諧運動是一個重要的物理問題。利用二維的等速率圓周運動來闡述簡諧運動是很好的教學方式，此教學內容在理論部分，已完美的呈現。但其實驗部分，卻缺乏一個好的實驗設計，主要原因是因為要設計一個連結一維運動與二維運動的相關實驗是有其困難度。也因如此，其相關的實驗內容，多以動畫的方式呈現。然而近年來因為 **Tracker** 免費軟體的出現，此實驗的設計就出現了可能性。此新的研究方法，對於以前動則須百萬元經費的高速攝影機及軟體才能研究的運動學，帶來了新的做法，也因為其軟體免費易取得，它提供了教學設計實驗新的思考方向。尤其針對於較難設計的二維運動問題，**Tracker** 軟體提供了一個非常好的方法。

我們的實驗設計概念極為簡單，僅需利用在轉動慣量實驗中所使用的電動旋轉台，在其轉動期間將其拍攝起來，並利用 **Tracker** 免費軟體來進行分析即可。因為 **Tracker** 能同時記錄時間與 x 軸及 y 軸的軌跡，但是我們是要連結一維運動與二維運動，因此只需記錄時間與 x 軸的相關數據，並將其繪圖，得到其運動軌跡為 $\cos \theta$ 或 $\sin \theta$ 的形式。

結合了以上的觀點，我們針對一維簡諧運動的問題，設計了一個相關的實驗。同時使用

公共授權軟體 Tracker 將數位影像轉換為可分析數據，並利用此軟體呈現了一個連結一維運動與二維運動的實驗，並將此結果與理論作驗證。

二、實驗所需之材料及軟體：

1. 轉動慣量實驗中所使用的電動旋轉台（以下簡稱旋轉台）（如圖 4 所示）。
2. 電源供應器及連接線。
3. 標記貼紙（作為追蹤的標記物）。
4. 具有高速攝影功能（每秒至少可拍 120 張相片）的相機。
5. 相機腳架及水平儀。
6. 電腦與公共授權軟體 tracker。



圖 4：實驗裝置圖

三、實驗操作步驟：

1. 依圖 4 將實驗裝置裝設完成。
2. 利用水平儀確認旋轉台的水平，同時確認相機是否水平。
3. 打開旋轉台的開關，此時旋轉台將開始旋轉，測試旋轉台是否能在實驗桌上順利轉動。
4. 設定相機的攝影模式為 120fps（每秒鐘 120 張相片），按下攝影鈕，開始進行圓周運動實驗的錄影。
5. 操作電壓控制在 1.5V 到 3.8V 之間，並對不同電壓拍攝實驗影片。
6. 當結束錄影時，將所拍攝的影片，利用公共授權軟體 tracker 進行分析。
7. 重複以上步驟並多次進行實驗，分析所得結果。

肆、實驗結果分析

實驗影片顯示，圓盤上標記物的運動行為是標準的等速率圓周運動。由於本實驗的目的在驗證標記物在直徑上的投影（即其運動軌跡的水平分量）進行簡諧運動，藉由 **tracker** 分析，我們可以記錄標記物在不同時間下的水平分量 x 。同時為了驗證簡諧運動速度與加速度的數學型態，我們亦紀錄了標記物速度水平分量 v_x 與加速度水平分量 a_x 。以操作電壓為 3.8V 的組別為例，我們將上述三個物理量對時間 t 作圖，遂可得到 $x(t)$ 、 $v_x(t)$ ，以及 $a_x(t)$ 關係圖，如圖 5 所示。將圖 5 中的 $x(t)$ 進行函數擬合(fitting)，我們可以得到一個餘弦函數

$$x(t) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{b_1}t + c_1\right) \quad (5)$$

其中擬合函數與實驗數據的決定係數 (R squared, 簡寫為 Rsqr) 為 0.9990，意指兩者具有高度的適配度，亦即此擬合函數足以代表實驗數據。此結果驗證了等速率圓周運動在直徑上的投影即為標準的簡諧運動。方程式(5)的擬合參數分別為 $a_1=0.1007$ 、 $b_1=0.5280$ ，以及 $c_1=0.9949$ 。與先前的理論方程式(2)比較，我們可知 a_1 代表簡諧運動的振幅， b_1 代表簡諧運動的周期，而 c_1 為起始相位常數。同理，我們亦可以得到 $v_x(t)$ 與 $a_x(t)$ 的擬合函數

$$v_x(t) = a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{b_2}t + c_2\right) \quad (6)$$

以及

$$a_x(t) = a_3 \cos\left(\frac{2\pi}{b_3}t + c_3\right) \quad (7)$$

這兩個擬合函數的決定係數 Rsqr 分別為 0.9974 (方程式(6)) 與 0.9123 (方程式(7))。由於本實驗加速度水平分量之擬合函數的決定係數相對較低，因此本文中主要專注在 $x(t)$ 與 $v_x(t)$ 的分析上。在方程式(6)中，擬合參數分別為 $a_2=1.1977$ 、 $b_2=0.5280$ ，與 $c_2=2.5663$ 。

比較擬合函數(5)與(6)，我們可以發現兩者的擬合參數滿足 $a_2 \cong 2\pi a_1 / b_1$ ，且 $b_1 = b_2$ 同為簡諧運動的週期。這些擬合參數間的關係與先前理論推導的結果(方程式(2)與(3))吻合。此外，由於 $-\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ ，我們可以比較理論推導結果並進一步得到 $c_2 \cong c_1 + \pi/2$ 。而這個分析結果也可以從 c_1 與 c_2 的數值獲得證實。

為了進一步驗證上述擬合參數間的關係，我們改變電源供應器的操作電壓以調整旋轉台的轉速，並記錄下不同操作電壓下的對應擬合參數，如表一所示。將 a_1 / b_1 作為橫軸， a_2 作為縱軸，我們可以清楚看到 a_2 與 a_1 / b_1 成完美的線性關係，如圖 6(a)所示。圖中擬合直線的斜率為 6.2850，證實了 $a_2 \cong 2\pi a_1 / b_1$ 的關係。圖 6(b)則畫出 c_1 與 c_2 關係圖，其中擬合函數為 $c_2 = 0.9987 \times c_1 + 1.5712$ ，證實了 $c_2 \cong c_1 + \pi/2$ 。同時，我們也可以從表一觀察到 $b_1 \cong b_2$ 。

簡諧運動教學實驗設計

表一：在不同操作電壓下，利用方程式(1)與(2)進行擬合所得到的擬合參數。這些擬合結果的決定係數 R_{sq} 皆大於 0.9972，代表擬合函數與實驗數據有極佳的適配度。

擬合參數 操作電壓(V)	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
1.5	0.1003	2.1705	1.5700	0.2889	2.1711	3.1379
1.8	0.1011	1.5184	1.4447	0.4188	1.5180	3.0092
2.0	0.1021	1.2348	1.8704	0.5200	1.2347	3.4399
2.3	0.1007	1.0429	1.5557	0.6067	1.0429	3.1267
2.5	0.1009	0.9108	1.3652	0.6956	0.9108	2.9364
2.8	0.1009	0.7732	1.3445	0.8209	0.7732	2.9142
3.0	0.1014	0.7048	1.0886	0.9041	0.7048	2.6559
3.3	0.1012	0.6535	1.2919	0.9737	0.6535	2.8632
3.5	0.1014	0.5903	1.1110	1.0788	0.5903	2.6811
3.8	0.1007	0.5280	0.9949	1.1977	0.5280	2.5663

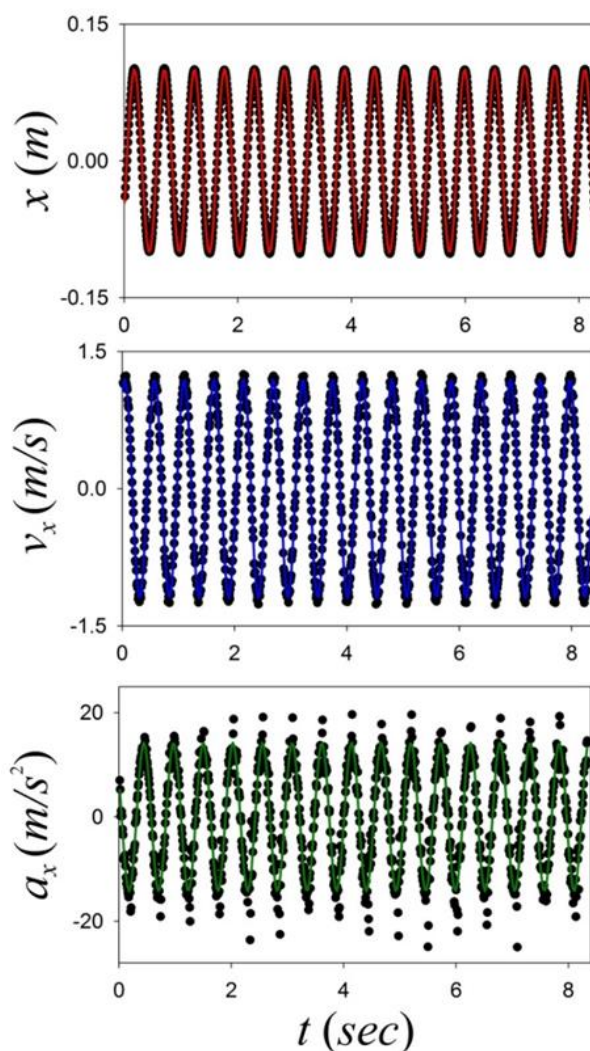


圖 5：標的物的位移水平分量 x 、速度水平分量 v_x 、與加速度水平分量 a_x 的時間關係圖

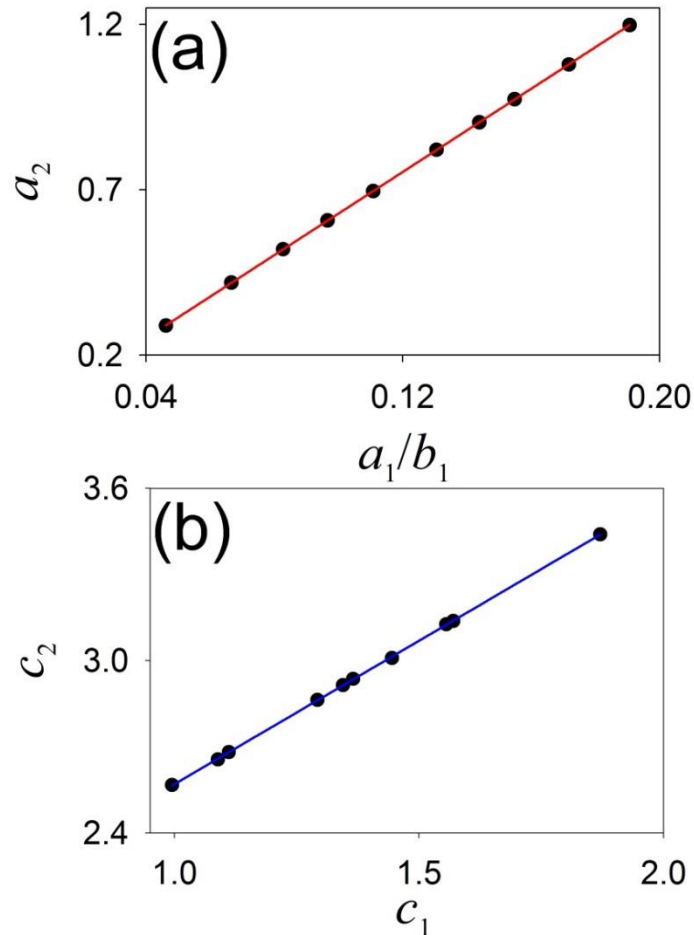


圖 6：不同擬合參數間的關係圖

伍、結論

本實驗中，在低操作電壓的條件下，例如 1.5V，此時旋轉台的轉速較慢，藉由分析所得到的 $a_2=0.2889$ ，而 $2\pi a_1/b_1 = 0.2898$ 若和來 a_2 比較，其相對的百分誤差約為 0.31%。若以 3.8V 的數據來看 $a_2=1.1977$ ， $2\pi a_1/b_1 = 1.1983$ 其百分誤差約為 0.05%。可以看得出在低轉速誤差值相對較大，這是因為旋轉台馬達在低轉速會有明顯的噪音與震動。但不管低轉速或較高轉速其結果其實都已經擬合的非常好。

至於本實驗加速度水平分量之擬合函數的決定係數相對較低，以 1.5V 為例，藉由分析所得到的 $a_x(t)$ 擬合函數之 Rsqr 僅為 0.2405。這也和其轉速低產生大的振動有關，雖然從數據的分析無法得到較好的結果，不過從圖四中我們很明顯地看到其圖形為 $\cos \theta$ 的形式，也間接證實了理論值的說明。

簡諧運動教學實驗設計

我們藉由 **tracker** 分析，得到時間^t與^x軸的相關數據並作圖，在二維的圖形中，我們可看到其位置、速度、加速度分別呈現 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 的形式，這說明了等速率圓周運動的直徑投影可以描述簡諧運動。另外我們利用餘弦函數對以上結果進行函數擬合(fitting)，在 $x(t)$ 、 $v_x(t)$ 的關係式上也得到非常好的結果，這個實驗結果也提供了等速率圓周運動的投影可以來描述簡諧運動。

參考文獻

1. Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J., (1993) *Fundamentals of Physics*. Wiley, New York.
2. 蔡仲尼、林誠孝、羅煜聘、洪耀正、蔡振凱、楊勝州、吳添全、劉育松 (2013)。普通物理學(第二版)，歐亞書局，台北。
3. 謝明君、翟大鈞、黃耿凌、江俊明 (2011)。普通物理(College Physics)，高立圖書有限公司，台北。
4. 普通物理實驗(2015)，逢甲大學出版。
5. <https://youtu.be/YdQSe8KyYe8>
6. <https://youtu.be/DgbdOQOd2DM>
7. 洪耀正、鄭翰陽、江俊明，二維彈性碰撞教學新解暨演示實驗，物理教育學刊，第十六卷第一期，33-40，2015-08。
8. 楊仲準，應用於物理教學之影像數位分析技術，物理教育學刊，第十三卷第一期，41-50，2012。

An Experiment of Teaching Simple Harmonic Motion

Chun-Ming Chiang*, Yao-Chen Hung, and Han-Yang Cheng

Physics Teaching and Research Center, Feng Chia University

*Corresponding author: cmchiang@fcu.edu.tw

Abstract

Regarding simple harmonic motion as the projection of uniform circular motion onto a diameter is a typical method appeared in many textbooks of general physics. The aforementioned concept has been displayed traditionally by means of physic based animations. In this paper, we propose a new physics experiment to record and analyze the x-component of the trajectory of the object undergoing uniform circular motion by using a high-speed camera and a free-software Tracker. Based on the experiment, the relation between uniform circular motion and simple harmonic motion can be demonstrated easily and quantitatively. Teachers can therefore attract students' interest in the problems of simple harmonic motion.

Key words: Tracker, Simple harmonic motion