

透過智慧手機瞭解彈簧串聯和並聯現象

邱家媛¹ 曾耀寰^{2*}

¹臺北市立萬芳高級中學

²中央研究院天文及天文物理研究所

*通訊作者：yhtseng@asiaa.sinica.edu.tw

(投稿日期：民國 105 年 10 月 13 日，接受日期：105 年 11 月 08 日)

摘要：1676 年英國科學家虎克 (Robert Hooke) 用拉丁文寫下一段易位構詞 (anagram) 的字謎，這段字謎描述了一項定律，虎克在 1679 年公布謎底，就是現在稱做的虎克定律。虎克定律可以廣義地描述彈性物體受伸展或壓縮時所受的作用力 ($F = -kx$)，通常學校是利用彈簧來當作實驗的工具，藉由彈簧懸掛各種不同質量的重物，與彈簧伸長量的關係，驗證虎克定律。彈簧受力後的運動屬於簡諧運動，本論文利用智慧手機本身所內建重力感測器功能 (可量加速度)，測量彈簧在串聯和並聯的狀況下，週期之間的變化。

關鍵詞：彈簧運動、虎克定律、簡諧運動、智慧手機、動手做

壹、前言

我們常說英國物理學家牛頓 (Isaac Newton) 是站巨人的肩膀之上，但同時期還有一位英國科學家卻是站在巨人的陰影之下，這位科學家是與牛頓同時期的虎克 (Robert Hooke)，遮蔽他的巨人包括牛頓、波以耳 (Robert Boyle) 和惠更斯 (Christiaan Huygen)。虎克很會動手做實驗，他設計的實驗和測量的結果都非常準確，波以耳定律所需的實驗工具—真空泵就是由虎克建造以及操作的，此外虎克設計了顯微鏡，「細胞」一詞也是他創立的。他另一項重要貢獻是有關彈性物體的虎克定律。

虎克用了一個拉丁文的字謎記錄他的發現，由於他幫波以耳進行許多氣體相關的實驗，很有可能發現氣體在壓縮時會有簡諧運動的現象，進而提出虎克定律。1679 年他公布字謎的解答：As the extension, so the weight，作用力是和彈性物質的延展量成正比，也就是說施以一作用力，伸長 (壓縮) 了一個單位長度，若是原先作用力的兩倍，則延長 (壓縮) 的長度也成原先的兩倍 (如圖 1)。

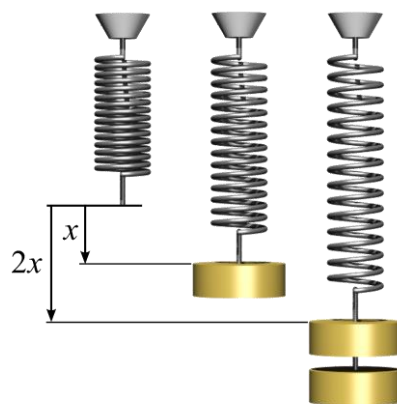


圖 1：當彈簧懸掛一砝碼，伸長量為 x ，懸掛兩個同重的砝碼，伸長量為 $2x$

一般學校都是透過彈簧來介紹虎克定律，只要在彈簧下懸掛砝碼，測量不同數量的砝碼所對應的彈簧伸長量，很容易透過實驗驗證彈簧的伸長量與受力成正比。此外，學生還可以透過多個彈簧的串聯和並聯，深入瞭解虎克定律。

本論文利用現今流行的智慧手機來驗證虎克定律，藉由智慧手機內建的微機電系統（曲建仲，2014），尤其是重力感測器或加速度計測量彈簧受力過程中的加速度，推算簡諧運動的週期，並嘗試測量相同彈簧串聯和並聯的對應週期，藉以驗證彈簧串聯並聯的特性。

貳、原理

在自然界中，我們可以觀察到許多週期性的振動，例如彈簧的往復伸縮、水面上小船的上下浮沉、吉他弦線的振動、微觀世界原子的振動、聲波傳播時的介質振動，或是花朵隨風微微搖曳以及小角度擺動的單擺……等，乍看之下，形形色色的振盪運動，似乎彼此並無關聯，其實它們都可以用簡諧運動(simple harmonic motion)來描述。因此，簡諧運動可以說是自然界最基本的振動。

研究簡諧運動的位移、速度、加速度之後，發現造成這種運動模式的關鍵來自「物體受力的模式」：凡是質量 m 的物體，若其所受淨力 F 大小與其位移大小 x 成正比（比例常數為 k ），且受力方向與位移方向相反，亦即符合 $F_x = -kx$ ，則此系統振盪起來，必以週期 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 作簡諧運動(SHM)。

以符合虎克定律的理想彈簧為例，當彈簧由自然長度受外力作用後形變，其彈性回復力就是一個與位移 x 「成正比而反向」的完美模式， $F_x = -kx$ ，其中 k 為彈簧彈力常數。

當我們把彈簧重新連結與組合時，整串彈簧組合將有新的等效彈力常數（如圖 2）。一般而言，我們可用分析彈簧組的受力，計算出等效彈力常數，通常最基本的組合有串聯和並聯，以下針對兩種情況計算對應的等效彈力常數。

透過智慧手機瞭解彈簧串聯和並聯現象

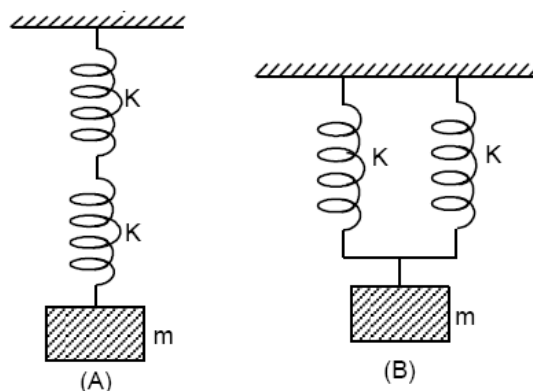


圖 2：(A)兩彈簧相互串聯 (B)兩彈簧相互並聯

將力常數各為 k_1 及 k_2 的兩條彈簧串聯，其等效彈力常數為

$$\frac{1}{k_{\text{串}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \Rightarrow k_{\text{串}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (1)$$

將力常數各為 k_1 及 k_2 的兩條彈簧並聯，其等效彈力常數為

$$k_{\text{並}} = k_1 + k_2 \quad (2)$$

現在我們可以設計一個實驗，利用簡諧運動週期的特性，使用手機上 APP 的功能，測量各種彈簧組合簡諧振動週期的改變，與上述理論得到的第(1)式和第(2)式相互驗證。

參、實驗步驟

一、實驗設置

現今智慧手機大多內建重力感測器或加速度計，可以即時測量手機當下受到的加速度分量，其對應的方向如圖 3。實驗時將彈簧連接手機，並懸掛固定（如圖 4），這時主要測量 y 方向的加速度分量，理想狀況下，手機只會在沿著 y 方向上下振動，其他兩個分量的加速度值為零。但在實際操作的情況，另兩個分量會有很小的數值變化，主要來自實驗進行時的誤差，例如伸長彈簧時，並沒有完全垂直向下，或者是放手前，整個彈簧並沒有完全靜止，造成一開始就有 x 或 z 方向的些微分量，由於彈簧的特性，導致實驗會有些微的誤差。

除此之外，手機藉由彈簧在 y 方向的振盪，會記錄到 y 方向加速度有簡諧振盪的變化，也就是有 \sin 或 \cos 的數值變化。

整個實驗採用華碩 ZenFone 2 Laser (ZE500KL)5 吋螢幕智慧手機，這款手機採用 64 位元高通 S410 處理器，作業系統為 64 位元 Android 6.0.1 版本。

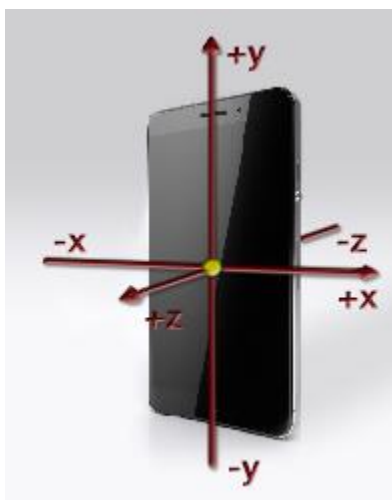


圖 3：通常加速度分量的方向設定為，沿著短軸方向為 x 分量、長軸方向為 y 分量，螢幕朝外的方向為 z 分量



圖 4：將手機掛在彈簧下方，向下拉扯後放手，手機呈現簡諧振盪

二、記錄資料

市面上記錄手機加速度變化的 app 很多，本論文採用 Veyra Software 所發展的 Physics Toolbox Sensor Suite。這套 app 提供 18 種偵測功能以及 2 種產生器（音調產生器和色彩產生器），並且支援 android 和 iOS 兩種版本，可以從官網或 app store 下載。

由於實驗用手機只有重力感測器，因此我們使用 app 當中的 g-Force Meter 功能，所量測

透過智慧手機瞭解彈簧串聯和並聯現象

的數值都是以重力加速度 g (9.8m/sec^2) 為單位。當手機懸掛在彈簧下方，並向下伸展一段距離後，便可以啟動 app。接著選擇 g-Force Meter，此時畫面出現三個測量的 g 力分量，按下右上方紅底白字的加號，便開始記錄（如圖 5A）。若要停止記錄，只要按下相同位置即可（如圖 5B），此時畫面出現輸入檔名的對話框（如圖 5C），然後將測量的數值以微軟的 excel 格式儲存。輸完檔名後，接著畫面出現分享檔案的方式（Share via，如圖 5D）。一般可分享外傳的方式很多，主要取決於手機安裝的 app，例如可以分享到電子郵件 app、Gmail app、儲存至雲端硬碟、或 OneDrive，本實驗使用電子郵件的方式將資料外傳。同時資料也會儲存在手機，儲存位置是在外接 sd 卡的 PhysicsToolboxSuite 目錄下。

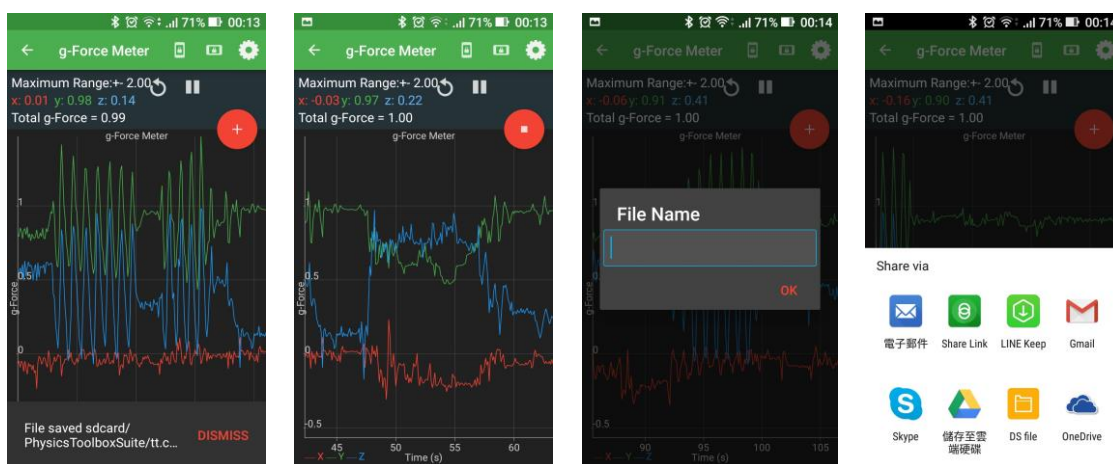


圖 5：圖片從左到右分別為 5A、5B、5C 和 5D

三、分析資料

儲存的檔案是以微軟 excel 的 csv 格式儲存，資料內的第一列是測量的當地時間，第二到四列分別是 x 、 y 和 z 方向的加速度分量（如圖 6），接下來是要從這些資料當中找出手機受彈簧作用力的簡諧運動週期。

	A	B	C	D	E
1	time	x	y	z	
2	0.005	-0.00696	0.98639	0.0463	
3	0.006	-0.01234	0.98602	0.04422	
4	0.016	-0.02052	0.98504	0.05216	
5	0.027	-0.02223	0.97967	0.04336	
6	0.035	-0.02345	0.97576	0.0342	
7	0.049	-0.03884	0.97478	0.02871	
8	0.055	-0.04569	0.97234	0.02235	
9	0.064	-0.04556	0.97197	0.02932	
10	0.086	-0.03933	0.97026	0.04092	

圖 6：用微軟 excel 軟體打開後的資料內容

為了取得彈簧擺盪的週期，我們使用 Gnuplot 繪圖軟體。Gnuplot 是一套跨各種平台的命令式繪圖軟體，可支援 windows、Mac OS、Linux 等作業系統，是屬於開放原始碼軟體，是免付費軟體。相關版本可從官網下載，我們是使用 2016 年 2 月釋出的 5.0.3 版本，安裝在 64 位元的微軟 Surface 3 平板電腦，作業系統是微軟 Windows 10。

藉由 Gnuplot 繪圖軟體可以很容易看出彈簧的簡諧運動（如圖 7），圖形當中最明顯的簡諧振盪是 y 方向的加速度分量，其他兩個分量也有些微的簡諧振盪，如前一節所述，主要來自實驗剛開始不可避免的初始誤差，造成之後的些微振盪。其次，可以看到 y 方向分量有明顯的 sin 或 cos 的來回變化，是以 1G(一個重力加速度 $\sim 9.8\text{m/sec}^2$)為中心，振幅為 0.4m/sec^2 ，來回擺盪，可以想見是一個非常有規律的上下振盪。

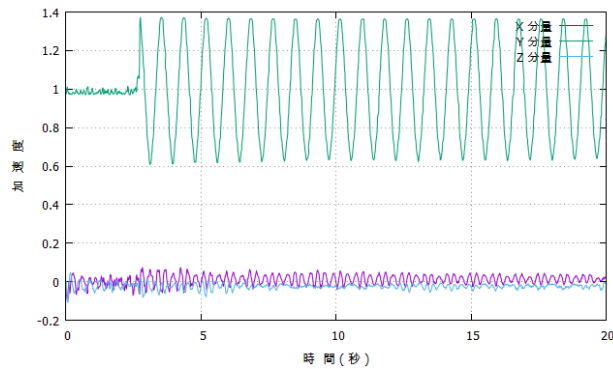


圖 7：gnuplot 繪出的圖形，橫座標為時間，縱座標是加速度分量，紫色線條為 x 分量、綠色為 y 分量、藍色為 z 分量

當 Gnuplot 繪出圖形後，可以將滑鼠移到第一個數值的最高點，此時視窗左下角會出現滑鼠在圖形上的位置，分別是 x（時間）和 y（加速度值）。反覆標示圖形的最高點，並記錄下該點的時間，相鄰兩個最高點的時間間格就是彈簧振動的週期。

肆、結果

一、測量彈簧的彈力常數

單一彈簧振盪實驗進行兩次，每次從實驗數據選取振盪週期十次，然後除以 10，得該次實驗的平均週期。實驗結果如表 1，兩次實驗分別得到相同的 0.8266 秒。從華碩產品的規格可以得到實驗用手機的質量，官網表示該款手機的質量（含電池）為 0.14 千克，根據虎克定律， $k = 4\pi^2 m/T^2$ ，實驗的質量為 0.14 千克，週期為 0.8266 秒，得到的常數 k 為 8.089 kg/sec^2 。

表 1：不同彈簧組合所量測的振盪週期

彈簧組態	第一次測量週期	第二次測量週期
單一彈簧	0.8266 秒	0.8266 秒
彈簧並聯	0.6103 秒	0.6116 秒
彈簧串聯	1.1841 秒	1.183 秒

二、測量兩條彈簧串聯和並聯的週期

接下來是測量彈簧串聯和並聯的週期，使用相同的方式獲得週期（如圖 8），結果如表 1。每種連結方式都進行兩次實驗，每次實驗都從中取十次週期，並做平均。

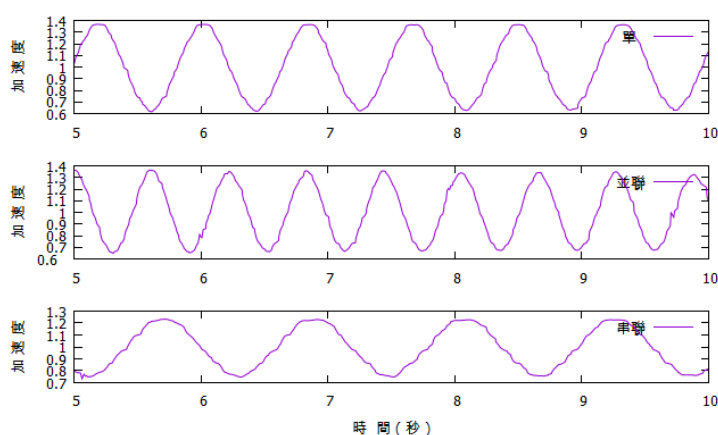


圖 8：第一次測量的加速度分量變化，由上到下，分別是單一彈簧、並聯和串聯

根據上一節的原理，實驗用的彈簧常數相同，串聯的常數是 $k/2$ ，並聯的常數是 $2k$ ，因此串聯的週期是單一週期的 $\sqrt{2}$ 倍，而並聯的週期是單一週期的 $1/\sqrt{2}$ 倍，分別是 1.169 秒（串聯）以及 0.5845 秒（並聯）。實驗測量的兩次平均分別為 1.18355 秒（串聯）和 0.61095 秒（並聯），誤差約 1% 和 4%。

伍、結論

在學校教學的實際經驗中，提到虎克定律都是透過彈簧的伸展行為加以解釋，而彈簧因懸掛重物後造成的簡諧運動，其週期只和懸掛物體的質量 $1/2$ 次方成正比，和彈簧彈力常數 $1/2$ 次方成反比。

通常課本都會以彈簧的串聯並聯模式作為虎克定律的觀念延伸，以兩條相同的彈簧（彈力常數相同）進行串聯並聯分析時，串聯後的等效彈力常數是單一彈簧的一半，而並聯是單一彈簧的 2 倍。由於週期和彈力常數 $1/2$ 次方成反比，串聯的週期是原先的 $\sqrt{2}$ （週期變長），並聯為原來的 $1/\sqrt{2}$ 倍（週期變短）。透過動手實驗，可以明顯感受到串聯後的彈簧振動較慢（週期變長），並聯的彈簧振動變快（週期變短），可加深學生學習的印象。

智慧手機流行的浪潮不可忽視，行動裝置隨時上網的影響力逐漸超越傳統媒體（國家發展委員會，2014）。我們不應該以禁止的方式看待智慧手機的使用，應該嘗試讓手機不再只是通訊、上網路社群和玩遊戲，而是將現今年輕人流行的智慧手機，融入課程學習當中，可以藉由擴增實境（陳怡宏，2014）補充教學內容，增加學生學習的興趣，也可以藉由智慧手機內建微機電功能，增加學生實際動手做的經驗，讓學生主動學習科學，提高科學學習的興趣。

本論文結合了許多容易取得的實驗工具，以智慧手機內建的偵測器（主要是重力感測器），測量並取得實驗數據，經由行動網路通訊，將資料傳出，接著使用開放式軟體（gnuplot）作後續資料分析。這方式可擺脫以往做實驗一定要在學校實驗室內進行的限制，讓學生可以時時做實驗，處處做實驗的目的。

參考文獻

1. 曲建仲（2014）：微機電系統的發展與應用。科學月刊，536期，P580-588。
2. 高涌泉等（2011）：高中基礎物理（二）B上。龍騰文化。
3. Physics Toolbox Sensor Suite 官網，<http://www.vieyrasoftware.net/>。
4. Gnuplot 下載網址，<https://sourceforge.net/projects/gnuplot/files/gnuplot/5.0.3/>，若是微軟 64 位元作業系統，可選擇下載 `gp503-win64-mingw.exe`。
5. 國家發展委員會（2014），103 年個人家戶數位機會調查報告。
6. 陳怡宏（2014），行動科技、擴增實境與 3D 實驗影片教學：有機分子模型擴增實境，臺灣化學教育，第三期。

Understanding the Phenomenon of the Series and Parallel Spring by Smartphone

Chia-Yuan Chiu¹ and Yao-Huan Tseng^{2*}

¹Taipei Wangfang High School

²Institute of astronomy and astrophysics, Academia Sinica

*Corresponding author: yhtseng@asiaa.sinica.edu.tw

Abstract

The British physicist Robert Hooke wrote down a law as a Latin anagram in 1676. He published the solution, now called Hooke's law in 1679. The Hooke's law describes the extension/compression of an elastic material exerted by a force in form of $F = -kx$ in general. High school students learn the Hooke's law by hanging different objects with a spring in laboratory. In this paper, we show the on-board sensors of the smartphones can measure the period of the series and parallel springs. We demonstrate the smartphone can be used for doing the physics experiment easily.

Key words: spring motion, simple harmonic oscillation, Hooke's law, diy, smartphone

邱家媛、曾耀寰