

利用智慧手機測量單擺周期

曾耀寰

中央研究院天文及天文物理研究所
yhtseng@asiaa.sinica.edu.tw

(投稿日期：民國 105 年 10 月 13 日，接受日期：105 年 11 月 08 日)

摘要：義大利天文學家伽利略在大約 1581 年意外發現單擺的等時性，他以自己的脈搏量測懸掛在教堂頂的吊燈，他發現即便是吊燈擺動的幅度減弱，擺動的周期幾乎不變。在微幅擺動的情況下，單擺簡諧運動的周期只和單擺的長度有關。本論文主要介紹如何利用智慧手機，以簡單且隨時隨地可進行實驗的情況下，讓學生藉由動手做的過程，瞭解單擺實驗的物理內容。

關鍵詞：單擺實驗、等時性、簡諧運動、智慧手機、動手做

壹、前言

學生在校學習物理，除了教師課堂上的理論和知識傳授，還要實際動手做實驗。物理學是一切自然科學的根本，是研究和瞭解宇宙大自然運作的基礎，但在物理這個科目的教學當中，並不僅是純粹理論的傳授，還要有客觀世界的驗證。物理需要邏輯性高的數學，為其理論之敘述提供邏輯一致的說法，但物理理論還需和客觀世界比對，透過對宇宙的觀察以及客觀的實驗，加以驗證，這是物理和數學最大差異的地方。

在物理學習過程中，單擺的等時性是必學的內容。一個簡單的鉛垂擺盪，在過程中隱藏了規律。1581 年，一位正在義大利比薩大學醫學院就讀的學生，無意間發現教堂的吊燈擺盪有一個規律現象，他用自己的脈搏檢驗吊燈擺盪的周期，確認吊燈不論擺盪的幅度大小，來回擺盪的周期是固定的，我們現在稱做單擺的等時性。這位學生就是日後著名的近代科學之父—伽利略（Galileo Galilei）。

單擺的等時性是日後機械式鐘錶運作的基本原理，伽利略當時並未據此發明機械式鐘錶，而是後來的惠更斯（Christiaan Huygens），他發現單擺的等時性唯有在擺動角度較小的情況才成立。單擺之所以規律地來回擺盪，只要是來自擺盪時所受到的回復力，這個回復力來

自擺垂的重力，嚴格說是擺垂重力在擺垂運動方向的分量 ($mg \sin\theta$)，這個分量會讓擺垂重回到最低點，造成擺垂來回擺盪。

整個擺盪過程牽涉到擺垂在運動方向作用力的變化，以及擺盪速度的變化，而整個擺盪的周期除了和當地的重力加速度 (g) 有關，另一個影響因素是擺長(L)。

通常進行單擺實驗，所需要的量測工具是一個計時器，例如手持碼錶計時，或用更準確的光電閘記錄時間(圖 1)，甚至可以藉由電腦音效卡，當作高精準的計時器(傅學海，2003)。實驗過程中，擺垂經過光電閘，來回遮蔽光線，便可以記錄擺盪的時間，改變不同的擺長，不僅呈現單擺的等時性，還可以驗證周期是否和擺長的 $1/2$ 次方成正比。



圖 1：手持碼錶計時

單擺實驗所需的設備簡單，懸掛的擺垂容易取得和架設，所需的計時器以手持碼錶最易於攜帶，但若要較精準的量測，就得到光電閘或電腦音效卡計時。不過這些計時設備不易攜帶和取得，因此一般單擺實驗都得到學校的實驗室內進行，學生不太容易在家中進行較精準的單擺實驗。隨著科技進步，行動裝置(手機和平版電腦)逐漸普及化，根據國家發展委員會在 2014 年的個人家戶數位機會調查報告顯示，12 歲以上網路族 84.9% 擁有智慧(能)型手機，智慧(能)型手機擁有率首次超越桌上型電腦(81.2%)。顯見行動裝置上網成為民眾隨時透過網路獲取訊息的重要工具，而隨著物聯網的來臨以及微機電系統 (microelectromechanical systems, MEMS) 的普及，手機還可以做為行動偵測的平台。現有智慧(能)手機除基本撥打和接收電話訊號外，也內建許多偵測器 (sensors)，例如常見的照相機，可拍照和錄影，一些照相機還能同時接收可見光和近紅外光的訊號。其他還有錄音設備、陀螺儀 (gyroscope)、加速度計 (accelerometer)、磁強計 (magnetometer)、全球定位系統 (GPS)、藍芽通訊、無線網路、鄰近感測器 (proximity sensor)，有些手機或行動裝置甚至有氣壓計 (barometer) 和紫外線偵測器。未來這些偵測器會越做越小，越做越精確，只要

利用智慧手機測量單擺周期

搭配合適的 APP，就可以應用在一般物理實驗，將手機當作隨手可得的偵測儀器，例如用手機進行都卜勒效應實驗（曾耀寰，2015）。

手機用在物理實驗上，對學生動手做實驗有很大的幫助，一來，現在的年輕人對手機熟悉度高，易於上手，二來，現在的學生幾乎人手一機，若能用手機當作實驗工具，便可以隨時隨地做實驗，甚至用手邊的工具，設計實驗。

本篇論文將利用智慧手機內常有的重力感測器或加速度計來測量單擺的周期，實驗時，將智慧手機當成擺垂，重力感測器或加速度計測量手機擺盪時的加速度變化，量到周期，藉此可以進行單擺實驗，驗證單擺運動的規律。

貳、原理

單擺實驗是一個典型的簡諧運動，懸掛的擺垂受到萬有引力的回復作用，在最低點的兩旁來回擺盪，如圖 2。當擺線與鉛垂線夾角 θ ，質量 m 的擺垂在擺線方向上受到 $mg \cos\theta$ 的作用分力拉扯，而垂直擺線有一作用分力 $mg \sin\theta$ ，嘗試將擺垂拉回最低點，形成一個相對於最低點往返的簡諧運動。

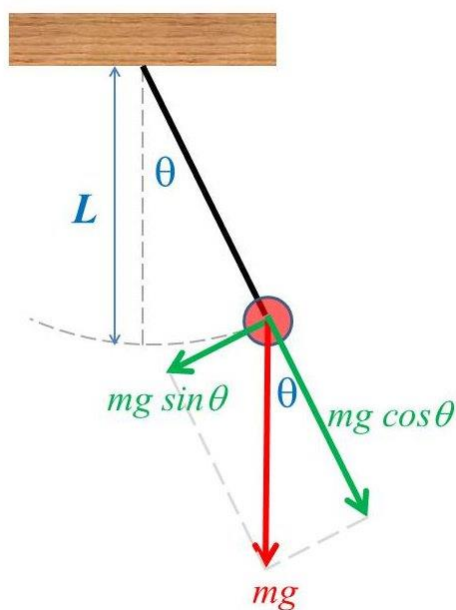


圖 2：細繩懸掛質量為 m 的擺垂示意圖

這個來回擺盪的規律運動有一周期 T ，只與擺線長度 L ，以及當地的重力加速度 g 有關。在擺動角度 θ 很小的情況下，周期如第(1)式，在重力加速度不變的情況下，測量到的周期只和擺長的 $1/2$ 次方成正比，和擺動角度 θ 的大小（擺幅）無關，也和懸掛的擺垂質量無關。

曾耀寰

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

從單擺運動方程式來看，這是一個二維的加速度運動，但主要運動只有擺動角度的變化，運動方程式可以寫成一維角度變化的形式，如第(2)式

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta \quad (2)$$

(2)式當中的 I 是單擺的轉動慣量，若考慮小角度擺動， $\sin\theta$ 趨近於 θ ，式子可以改寫成

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta \quad (3)$$

(3)式的解析解可寫成 \cos 的形式，如第(4)式，當中的 A 是 θ 的擺盪振幅，而 ω 是角速度 ($2\pi/T$)

$$\theta = A\cos\omega t \quad (4)$$

已知 θ 隨時間的變化形式，透過一次和二次微分，可以分別得到角速度（或切線方向速度）以及角加速度（或切線方向加速度）隨時間的變化，由於我們選 \cos 的形式為角度變化的解，因此角速度的形式為 \sin ，角加速度的形式也類似 \cos ，但與角度有 180 度的相位差，其形式分別如圖 3。

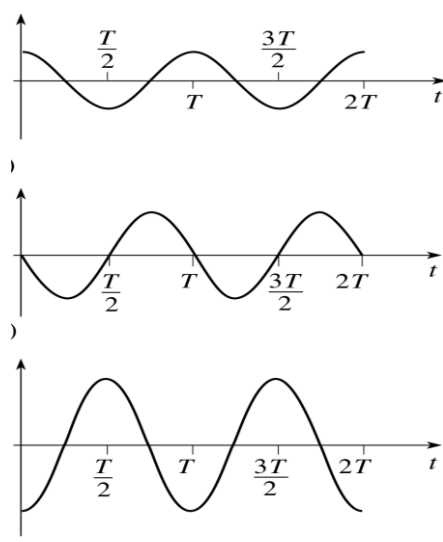


圖 3：圖形由上而下分別是角度、垂直擺線速度分量以及垂直擺線加速度分量的變化

利用智慧手機測量單擺周期

從圖 3 可以清楚看出，當角度擺盪擺向最大值（轉折點）的時候，角速度趨近為零，單擺逐漸停止擺動，但切線加速度卻是最大。通過轉折點之後，單擺擺盪回來，到了最低點（ $\theta = 0$ ），角速度最大，但切線加速度為零，這是因為重力加速度在切向方向為零。不管是在切向方向，或者是沿著擺線方向的加速度，其變化的形式都是以 \sin 或 \cos 的簡諧形式變化，這種變化可以透過手機加速度的測量得到。

參、實驗步驟

一、實驗設置

智慧手機內部有重力感測器或加速度計可以量測手機當下受到的加速度，加速度三個分量的方向參考圖 4。實驗時，手機的基本懸掛方式如圖 5，若考慮避免擺動時，手機出現旋轉情況，也可以用兩條細繩懸掛手機。

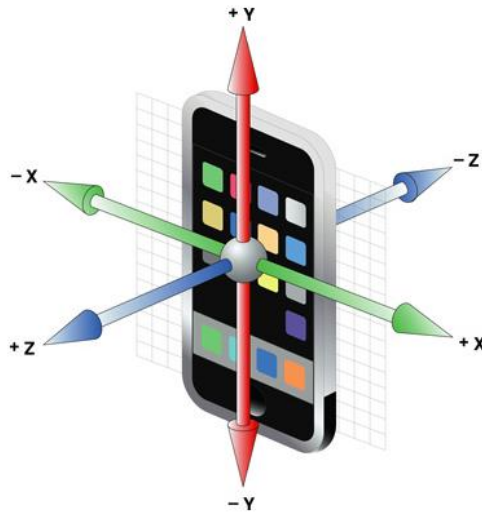


圖 4：通常手機沿著短軸方向為 x 分量、長軸方向為 y 分量、垂直螢幕向外為 z 分量

根據圖的懸掛方式，手機主要紀錄的是沿著手機長軸方向（y 軸）的加速度分量，也就是沿著垂線方向的加速度。當手機開始擺動，記錄的加速度分量會隨著時間有 \sin 形式的變化。

整個實驗採用華碩 ZenFone 2 Laser (ZE500KL) 5 吋螢幕智慧手機，這款手機採用 64 位元高通 S410 處理器，作業系統為 64 位元 Android 6.0.1 版本。

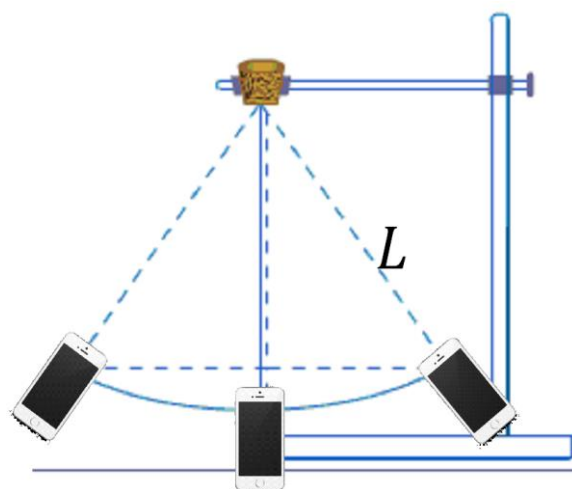


圖 5：將手機當成擺垂懸掛示意圖

二、記錄資料

在實驗當中，我們需要下載可以測量和紀錄加速度的適當 app。測量手機加速度的 app 很多，我們採用由一對夫妻成立的 Vieyra Software 所發展的 Physics Toolbox Sensor Suite。這套 app 提供 18 種偵測功能以及 2 種產生器（音調產生器和色彩產生器），如表一，並且支援 android 和 iOS 兩種版本，可以從官網下載。雖然提供 18 種偵測的功能，但礙於智慧手機款式不同，有些手機並不支援對應的偵測裝置，例如本次實驗所用的手機只有重力感測器，無法使用線性加速度器的偵測，因此本論文主要是用 **g-Force Meter** 的功能，量出來的加速度數值都是相對於重力加速度，例如靜止擺置手機時，量到沿著地心方向的分量為 1，也就是 9.81m/sec^2 ，若是在自由落體狀態，量到的則為 0，表示失重。

表一：Physics Toolbox Sensor Suite 支援功能列表

(1) g-Force Meter	(11) Sound Meter
(2) Linear Accelerometer	(12) UV Meter
(3) Gyroscope	(13) Orientation
(4) Barometer	(14) Pitch Detector
(5) Roller Coaster	(15) Wear
(6) Proximeter	(16) Compass
(7) Hygrometer	(17) Ruler
(8) Thermometer	(18) GPS
(9) Magnetometer	(19) Tone Generator
(10) Light Meter	(20) Color Generator

利用智慧手機測量單擺周期

實驗時，將手機懸掛在細繩下方，當成擺垂，啟動 app，選擇 g-Force Meter，此時畫面出現三個測量的 g 力分量，按下右上方紅底白字的加號，便開始記錄（如圖 6A）。若要停止記錄，只要按下相同位置即可，此時畫面出現輸入檔名的對話框（如圖 6B），然後將測量的數值以 excel 的格式存在手機。輸完檔名後，接著畫面出現分享檔案的方式（Share via，如圖 6C），可選擇電子郵件（例如 Gmail），將資料從手機傳出。

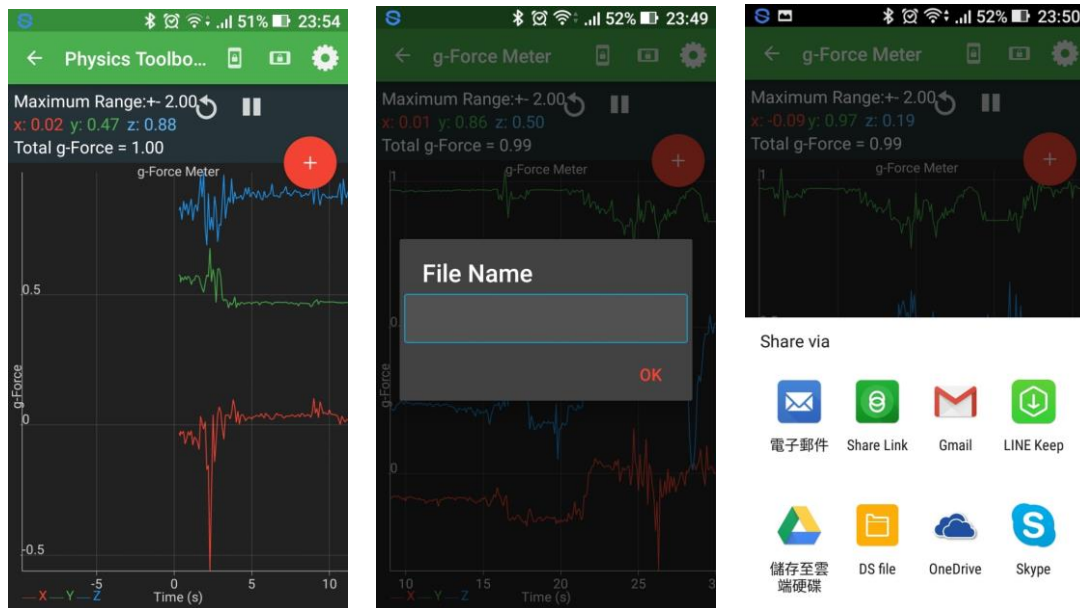


圖 6：app 螢幕所顯示的部分快照，由左而右分別為 A、B、C

三、分析資料

分析資料的方式很多種，本論文是用 Gnuplot 繪圖軟體，以圖型介面的方式，找出單擺的周期。

Gnuplot 是一套跨各種平台的命令式繪圖軟體，可支援 windows、Mac OS、Linux 等作業系統，是屬於開放原始碼軟體，免費的。相關版本可從官網下載。Gnuplot 是命令式軟體，啟動軟體後，是以輸入指令的方式繪圖，有些指令是可以從視窗上選擇執行，通常只需要五個指令就可以看到繪圖結果（如圖 7）。app 以 excel 格式記錄加速度數值，第一列是時間，單位是秒數，第二、三和四列分別是 x、y 和 z 分量。

接下來是用滑鼠移到圖型最高點的位置，此時左下角出現滑鼠位置所對應的 x（時間）和 y（加速度值）。相鄰兩個 y 分量最高點之間的時間間隔就是此次單擺周期的一半。

曾耀寰

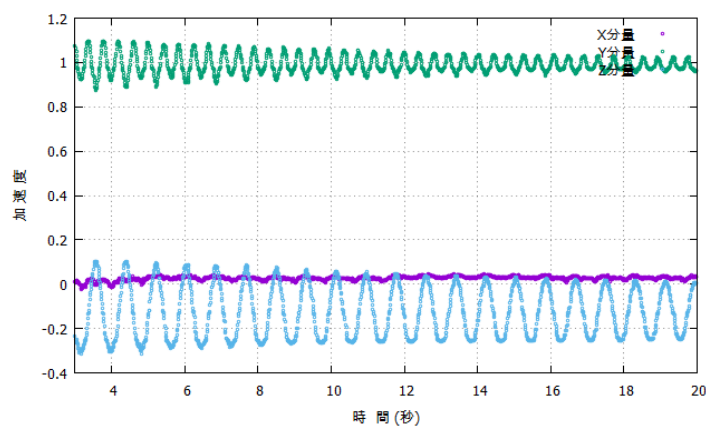


圖 7：gnuplot 根據資料繪製的加速度隨時間的變化圖，橫座標是時間，縱座標是加速度分量，紫色是 x 分量、綠色是 y 分量、藍色是 z 分量

肆、結果

一、擺長和周期的關係

單擺擺動時，主要是受到向下的萬有引力，若看沿著擺線的加速度分量（y 分量），可以知道擺垂（手機）在最低位置的時候，主要受到擺垂的重力拉扯，向心力最強，切向速度最大，加速度最大。當擺垂到達轉折點（最高位置）時，速度為零，沿著擺線的重力最小，向心力最小，因此加速度最小。從加速度隨時間變化的圖型（如圖 8）可以看到最低點的位置是擺垂到達轉折點，而圖型最高點是擺垂通過擺盪最低點的時候，因此一次周期的循環是要通過三次加速度最高點，也就是之前所說：相鄰兩個最高點之間的時間間隔就是此次單擺周期的一半。本次實驗針對 8 次不同長度的擺長進行測量，結果如表二。由於實驗測量的長度精確度只到公分，公分以下為估計值，測量結果有 3 位有效位數。周期數據來自於手機，數值到小數點以下第三位，從表 2 可看出，除第一筆數據外，皆為 3 位有效位數。在計算重力加速度時，所得結果皆為 3 位有效位數，誤差也為 3 位有效位數（杜先智，1994）。

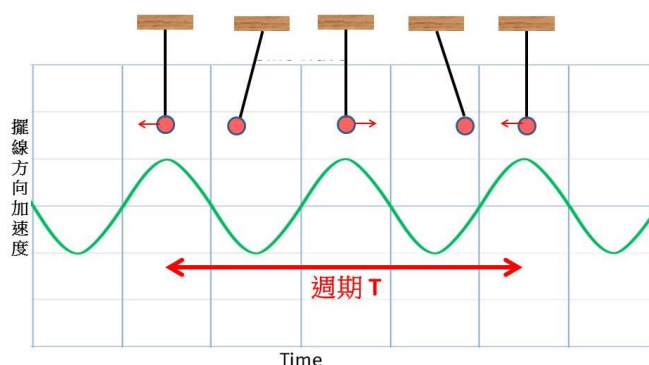


圖 8：沿著擺線方向的加速度變化與單擺擺動的對應圖

利用智慧手機測量單擺周期

表二：不同擺長所測量的周期

擺長 L (cm)	周期 T (sec)	重力加速度 g(cm/sec ²)	誤差
25.6	1.012	986.	0.00509
24.1	0.971	1000	0.0194
22.9	0.948	1000	0.0194
21.5	0.923	996.	0.0153
19.8	0.898	969.	0.0122
18.0	0.854	974.	0.00714
16.5	0.822	964.	0.0173
14.4	0.782	929.	0.0530

根據第(2.1)式，單擺周期和擺線長度的 $1/2$ 次方成正比，我們測量不同的擺線長度，以及對應的周期，可以發現之間的正比關係（如圖 9）。針對這些數據，找出擬合的方程式為 $T = 0.200424 L^{1/2}$ 。根據第(2.1)式，分別將 π 和重力加速度 ($g = 9.81\text{m/sec}^2 = 981\text{cm/sec}^2$) 代入，得到 $T = 0.200607 L^{1/2}$ ，接近實驗數據。

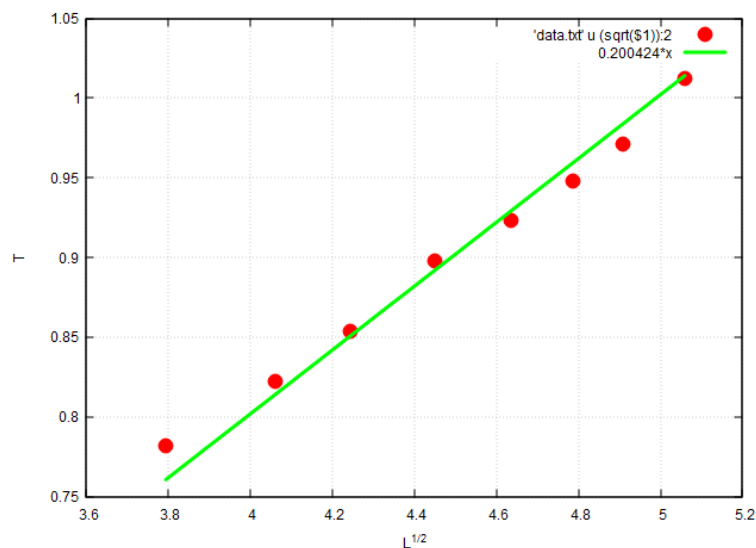


圖 9：周期與擺長 $1/2$ 次方的對應圖，綠色線條是一條直線的擬合

二、測量當地的重力加速度 g

從第(2.1)式可以看出，若測量出擺線長度以及周期，可以算出當地的重力加速度，我們從上一筆測量資料，可以分別算出加速度值（如表二），其八次實驗的平均值為 9.78m/sec^2 ，一般重力加速度 g 為 9.81m/sec^2 。

伍、結論

一般學校將學生攜帶手機當成洪水猛獸，提防學生在上學期間沈迷在手機的世界，影響課程學習。但手機有其方便性和必要性，可以讓學生和家長之間溝通便利，有些學校會以暫時保管的方式處理，有些學校則採較寬鬆的方式，只有規定上課不可以使用手機。但從另一個角度，智慧手機是可以對課程學習有幫助，例如臺北市立萬芳高中的高瞻計畫（邱美虹、唐尉天，2014），就是嘗試透過智慧手機的擴增實境功能，協助教學（如圖 10）。

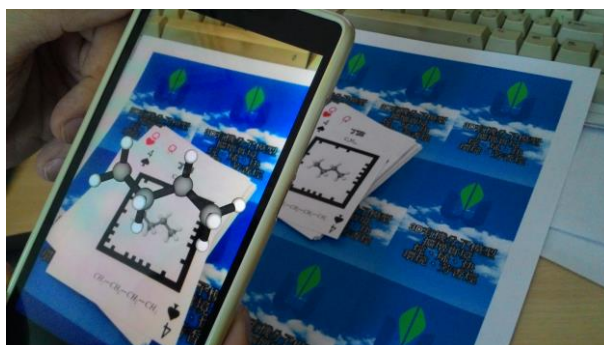


圖 10：萬芳高中化學老師陳怡宏發展分子結構的擴增實境

此外，我們也可以善加利用智慧手機內建的微機電功能，當成物理實驗的測量工具，透過本論文所進行的單擺實驗，可以讓學生輕易地完成，並能收集資料，進而分析資料。有了這樣方便的工具，實驗不再枯燥乏味，藉由手邊熟悉的工具，進行物理實驗，並與物理理論相互驗證。實驗的簡易性，也可以讓學生能進一步深入思考實驗的內容，改進實驗的架設與實驗步驟，尋求更準確的測量方式，甚至可以構思利用實驗進行有趣的科學研究，例如透過單擺周期來探討潮汐、月地相對位置的關係（楊易蓁和郭芷瑄，2015）。

智慧手機普及的時代是不可避免，如何善加利用內建的各種微機電功能，幫助學生隨時隨地用手机做實驗，不僅可以減少學生動手做實驗的困難度，甚至可以增加動手的興趣，進而喜愛科學，這對學生的學習是很好的另一項選擇。

參考文獻

1. 傅學海(2013): 音效卡高精度計時器之拓展。2013 中華民國物理教育聯合會議口頭論文。
2. 國家發展委員會(2014): 103 年個人家戶數位機會調查報告。
3. 曾耀寰(2015): 利用智慧手機測量都卜勒效應。第 12 屆物理演示實驗教學研討會論文集。
4. Physics Toolbox Sensor Suite 官網：<http://www.vieyrasoftware.net/>。
5. Gnuplot 下載網址：<https://sourceforge.net/projects/gnuplot/files/gnuplot/5.0.3/>，若是微軟 64 位元作業系統，可選擇下載 [gp503-win64-mingw.exe](http://sourceforge.net/projects/gnuplot/files/gnuplot/5.0.3/gp503-win64-mingw.exe)。
6. 邱美虹、唐尉天(2014)：在擴增實境中探索科學。科學月刊，539 期，P850-853。
7. 杜先智(1994)：數學在中學物理中的應用。台北：九章出版社。
8. 楊易蓁、郭芷瑄(2015)：探討單擺運動與潮汐、月地相對位置之關係。2015 臺灣國際科學展覽會論文。

Measurement of the Period of a Pendulum by Smartphone

Yao-Huan Tseng

Institute of astronomy and astrophysics, Academia Sinica
yhtseng@asiaa.sinica.edu.tw

Abstract

The Italian astronomer Galileo Galilei discovered the isochronism of the pendulum by accident around 1581. He measured the swinging motion of a chandelier in the Pisa cathedral by his pulse. He found the swinging period not varied even the weak swinging amplitude. In weak swinging, the period of the pendulum motion is only relative to the length of the pendulum. In this paper, I will show how to do a pendulum experiment with smartphone. Students can learn the physics of the pendulum by do-it-yourself experiment anytime and anywhere.

Key words: pendulum experiment, isochronism, simple harmonic oscillation, diy, smartphone

曾耀寰