

# 一個印證位移電流的具體方法

陳卓、周鑑恒

台灣大學物理系

## 摘要

本文提出一個具體印證“位移電流”的方法，其原理是：平行板電容器在充電時造成“位移電流”，它會造成隨時間變化的磁場，而這磁場又會造成感應電動勢。若在兩板之間架設探測線圈，並將訊號記錄，或用示波器顯示，即可印證“位移電流”的存在。本文提出具體的實驗裝置，並有理論分析，獲得量化的結論。

## 一、緒論

自從丹麥物理學家奧斯特 (H.C.Oersted, 1777~1851) 在 1820 年發現電流可以造成磁場之後，電和磁的關係便成為當時科學界所關注的重點。許多科學家投入這項研究，在經過約十年的研究之後，法拉第 (Michael Faraday, 1791~1867) 率先用一連串的實驗證實了“感應電流”的現象，但並未得出數量化的公式 (註 1)，後來又經過諾依曼 (F.E.Neumann, 1798~1895) 和韋伯 (W.E.Weber, 1804~1891) 等人的理論工作，才建立了今日眾所周知的法拉第電磁感應定律 (註 2)，即

$$\mathcal{E}_{mf} = - \frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t}$$

上式中  $\Phi_m$  為穿越某一封閉迴路的磁通量，而  $\mathcal{E}_{mf}$  則是該迴路上由磁通量變化所造成的電動勢。法拉第深信電磁場的實體性，提倡電力線和磁力線的觀念，並用以解釋吸引和排斥的現象。(註 3)

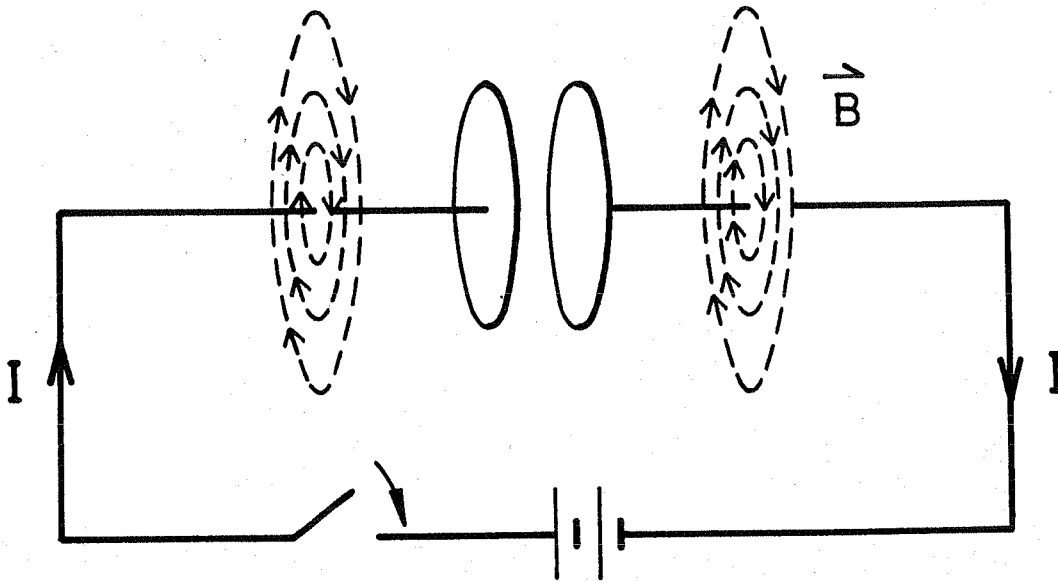
青年時代的馬克士威 (James Clerk Maxwell, 1831~1879) 深入研究電磁力線的作用，並把它們用數學形式表示。馬克士威在建立電磁場理論的過程中發現，用以計算電流造成磁場的公式，即安培定律， $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$  在電流隨時間變化時會引起矛盾，此一困境可由圖(一)中的情形表示：圖中的兩片圓板代表一對電容器之金屬片，當連結電池組的開關接通的瞬間，有電流  $I$  流經左右兩側的導線，按照安培定律，這電流會在導線周圍造成磁場，然而在兩片電容板中間的區域並無傳導電流，所以不應該有磁場。(註 4)

但這種情形會造成與安培定律本身的矛盾，其理由如圖(二)中所示：考慮此圖中沿  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  的封閉迴線，並沿此迴路作磁場  $\vec{B}$  的線積分，

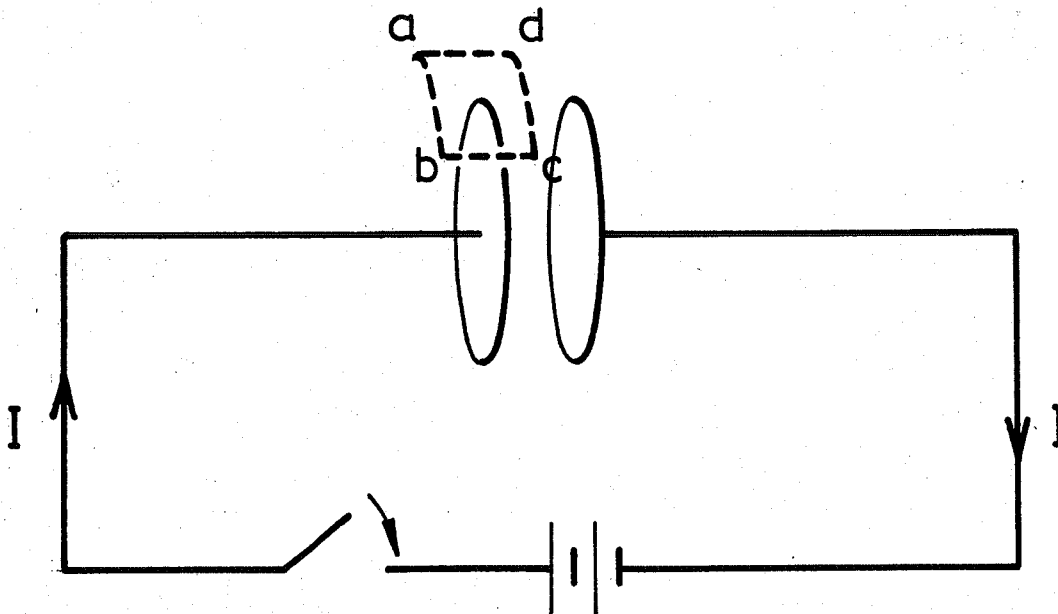
一個印證位移電流的具體方案

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

在上式中  $\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$ ，因為它是沿磁力線的積分， $\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$



圖(一) 圖中兩片圓板代表一對電容器之金屬片，當連結電池組的開關接通的瞬間，有電流  $I$  流經左右兩側導線，按照安培定律，會在導線周圍造成磁場，磁力線以虛線表示。



圖(二) 圖中虛線所示的  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  為一空間迴路，其中  $a \rightarrow b$  及  $c \rightarrow d$  兩段係以中軸為圓心的圓弧之片段， $b \rightarrow c$  及  $d \rightarrow a$  兩段則平行於中軸。

這是由於  $b \rightarrow c$  及  $d \rightarrow a$  方向相反，而磁場有軸對稱，又按照安培定律  $\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ，因為  $c \rightarrow d$  這一段處於兩板之間，由以上分析可知整個封閉迴路的積分  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$ ，但實際上並沒有電流穿越  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  這封閉迴路，所以按照安培定律，這個迴路的線積分應該等於零，這就造成了一個矛盾。

馬克士威解決這問題的辦法是假設兩板之間的區域亦有磁場，而這磁場是由此區域中電場變化所造成的。這個觀點不難理解：因為從法拉第感應定律來看，既然磁場的變化可以造成電場，反之電場的變化亦應可以造成磁場，這才是電場和磁場真正的互相感應。法拉第感應定律用現代符號表現的數學形式是

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA$$

我們可以想像由電場變化所造成磁場的數學形式必然類似，所以安培定律可修正為

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left\{ I + \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dA \right\}$$

上式中  $C$  表示一封閉迴路，而  $S$  則為一被  $C$  包圍的曲面，在等式右側中  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  相當於一個電流量密度，它的面積分相當於一個電流，亦就是所謂的“位移電流”。它的物理意義可以由圖(一)中的情況看出：設在  $t$  時左側電容板的載電量是  $Q(t)$ ，則  $\dot{Q}(t) = I$ ，設  $A$  為電容板的面積，則板上的表面電荷密度  $\sigma = Q/A$ ，由高斯定理可知，兩板之間的電場強度  $E_n$  為  $\sigma/\epsilon_0$ ，即  $E_n = Q/\epsilon_0 A$ ，所以  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{I}{A}$ ，相當於一個電流密度。(註 5)

馬克士威不但是一位偉大的理論物理學家，亦是一位卓越的實驗家，他在學術生涯的後期擔任著名的卡文迪許實驗室 (Cavendish Laboratory) 的第一位主任，做了不少精密的實驗，但卻並未親自證實電磁波的存在，直到他逝世後 8 年 (1888 年) 才由德國物理學家赫茲 (H.Hertz, 1857~1894) 利用 L-C 振盪的原理在實驗室中產生人工的電磁波。我們不禁會問，以馬克士威對電磁學的深刻瞭解以及卓越的實驗才能，為何竟未能這他自己領導的實驗室中證實位移電流的存在？這樣的問題當然不會有標準答案，作者的猜測是：當時有實測的技術困難，當圖(一)中的開關接通時，造成的瞬間電流只能維持約  $10^{-8}$  秒，不可能直接測出位移電流所造成的磁場。在下文中我們將介紹利用電磁感應的原理，在兩板之間設置探測線圈，再用“衝擊電流器”並配合用以整流的鍺二極體測出感應電流所累積的電量，由此證實位移電流的存在。

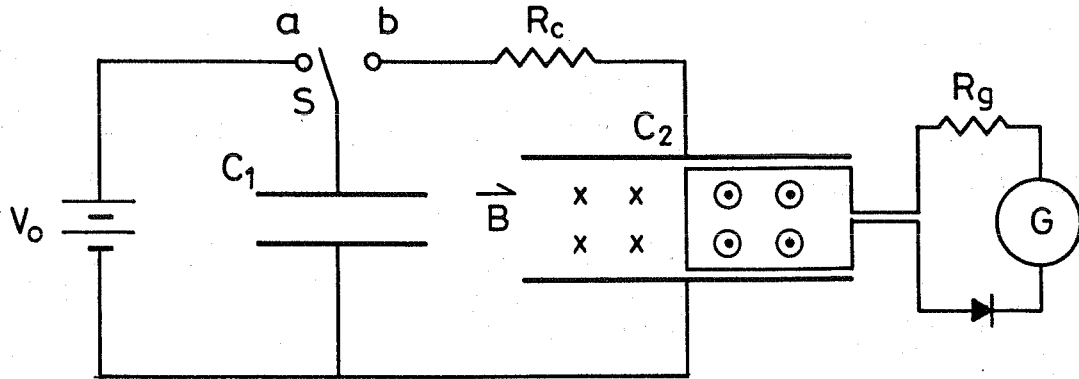
## 二、裝置及原理

### 1、裝置：

在圖(三)中的  $C_2$  是個大型平板電容器 (直徑約 50cm)，中間架設探測線圈，即圖中方形框，經一鍍製二極體與一架衝擊電流計  $G$  相連。此二極體之功能在維持線路中電流的單向性(註 6)。左側電容器用以蓄電， $S$  為一開關，往左連接時可使  $C_1$  由電源充電，往右連接時可將所蓄之電部份充入電容器  $C_2$ 。

### 2、原理：

先將開關  $S$  與左端  $a$  點相連，使電容器  $C_1$  充電，再將  $S$  與  $b$  端接通，使  $C_2$  充電。在  $C_2$  的充電過程中，兩板之間便會因“位移電流”而造成磁場 (以  $\times \odot$  表示)。這隨時間變化的磁場又會在方框形的探測線圈中造成感應電動勢，因而產生感應電流。由這電流所累積的總電量可由衝擊電流器記錄。



圖(三) 圖中的  $C_2$  是個大型平板電容器，直徑約 50cm，中間架設方框形探測線圈，通過一鍍二極體，與一架衝擊電流計  $G$  相連。左側電容器  $C_1$  用以蓄電，最左側為一電源。

### 3、計算：

設電容器  $C_2$  為一對圓形板，其半徑為  $R$ ，間隔高度為  $H$ ，整個探測線圈連同電流計之電阻為  $R_g$ 。設在  $t$  時  $C_2$  之電量為  $Q_2(t)$ ，則兩板之間的電場強度  $E_n$  為

$$E_n = \frac{Q_2(t)}{\epsilon_0 A}, \quad A = \pi R^2 \quad (1)$$

所以位移電流之密度  $J_d$  即為

$$J_d = \epsilon_0 \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} = \frac{\dot{Q}_2(t)}{A} \quad (2)$$

利用安培定律在距離中心軸  $r$  處的磁通量密度  $B(r)$  滿足

$$2\pi r B(r) = \mu_0 J_d(r) = \mu_0 \frac{\dot{Q}_2(t)}{A} \pi r^2$$

即

$$B(r) = \frac{\mu_0 \dot{Q}_2(t)}{2A} r \quad (3)$$

所以通過方形框探測線圈的磁通量 $\Phi_m$ 即為

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dA \\ &= \frac{\mu_0 \dot{Q}_2(t)}{2\pi R^2} \int_0^R r H dr \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} H \dot{Q}_2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

故

$$\frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t} = \frac{\mu_0}{4\pi} H \ddot{Q}_2(t) \quad (5)$$

上式即探測線圈內電動勢之值，若先不計正負號，則線圈內之電流 $i_g$ 即為電動勢除以線圈電阻 $R_g$ ，

$$i_g = \frac{\mu_0}{4\pi R_g} H \ddot{Q}_2(t) \quad (6)$$

若將含 $C_2$ 線路中的微小自感忽略，則由電路計算可知

$$Q_2(t) = Q_{\max} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (7)$$

上式中 $\tau$ 為線路之特徵時間，

$$\tau = R_c \left( \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \quad (8)$$

而 $Q_{\max}$ 為 $C_2$ 上之最大充電量，經計算可知

$$Q_{\max} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0 \quad (9)$$

經計算後即得

$$\ddot{Q}_2(t) = \frac{-1}{\tau^2} Q_{\max} e^{-t/\tau} \quad (10)$$

再利用(6)式即可得通過電流計的總電量

$$Q_g = \left| \int_0^{\infty} i_g(t) dt \right| = \frac{\mu_0 H}{4\pi R_g} \frac{Q_{\max}}{\tau} \quad (11)$$

將(8)、(9)兩式代入(11)式，即得

$$Q_g = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{H}{R_c R_g} \right) V_0 \quad (12)$$

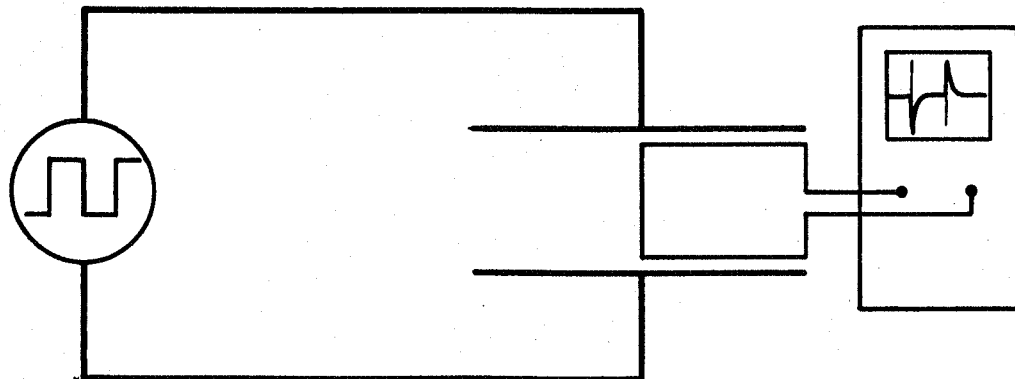
若取  $H=2.0\text{cm}$ ,  $R_g=0.01\Omega$ ,  $R_c=10\Omega$ ,  $V_0=200\text{V}$ , 代入上式, 即得  $Q_g=4\times 10^{-6}\text{Coul}$ , 這已是一個可測的數量級, 若設法將  $V_0$  再提高, 則更容易測量。

### 三、討論

在第 II 節的計算中, 把探測線圈的圈數以一圈計, 若圈數增加  $N$  倍, 但同時亦使  $R_g$  增加, 因為  $R_g$  的主要來源即是探測線圈的電阻, 所以增加圈數對累積電量的效果不大。又若省略圖(三)中左側的電容器  $C_1$  而直接用電源  $V_0$  充電, 則電源的內電阻不能忽略, 且不易掌控, 故引入  $C_1$  使電阻  $R_c$  減小且容易調整。

在推導第(2)式時, 並未考慮電磁場互相感應的高階計算, 即電場變化造成磁場, 磁場變化又造成電場, 這再生的電場變化又會導致磁場變化, 如此循環不已, 生生不息。若作此種計算, 每一循環便會產生一個  $\mu_0\epsilon_0=1/c^2$  的因數, 因此在用較大電容器充電時即可忽略。總而言之, 第(2)中右側各變量  $H$ ,  $R_g$ ,  $R_c$ ,  $V_0$  皆為可以調整及測定之量, 因此只要有靈敏的衝擊電流器, 即可定性及定量地印證此公式之正確性, 亦即印證位移電流之存在及數學表達式之正確性。

在推導第(7)式時, 我們曾假設含  $C_2$  線路中的自感為零, 但事實上此一電感不能完全忽略, 因為在線路剛接通之時電容器  $C_2$  上的電量雖然為零, 若採用(7)式的計算  $\dot{Q}_2(0) = Q_{\max}/\tau$  並不為零。這表示在一開始時位移電流即不等於零, 按照第(4)式, 它就會在感應線圈內造成磁通量。但在實際的情況下, 只要線路有些微的自感, 電流即不可能由零突然變成一個有限值, 這中間一定要經過一小段時間  $\epsilon (\approx L/R_c)$ , 在這段時間內電流  $\dot{Q}_2$  由零增加到一個最大值。因為這段時間非常短, 它會在感應線圈內造成很大的磁通量變化, 在衝擊電流器內累積電荷, 其符號與後段 ( $t>\epsilon$ ) 所累積的感應電荷相反。正因此才需要引入一個二極體把前面第一段時間內所造成的感應電流擋掉, 而僅記錄後段時間 ( $t>\epsilon$ ) 的感應電流所累積的電荷。經過一些理論分析我們知道在  $\epsilon \ll \tau$  的情況下, 第(7)式仍然有效, 所以第(12)亦仍然有效。



圖(四) 圖中所示者為圖(三)的改裝, 左側為一訊號產生器, 右側為一示波器。

若缺乏此項設備，仍可改變圖(三)中之裝置，成爲圖(四)中所示，再做定性觀察。圖(四)中左側爲一訊號產生器，用以取代圖(三)中之電源及電容器  $C_1$ ，右側爲一示波器，用以取代衝擊電流器。作者在台大普通物理實驗室中做了這種觀測，效果甚佳：當訊號產生器輸出方形波時，以適當的電阻線路連結探測線圈，以抑制示波器內部之電容器造成的振盪，則示波器中即顯示由充電、放電相繼不斷造成的鋸齒波形。波形之頻率及振幅皆可隨輸入訊號之頻率及功率隨意調整，頗爲有趣，可供學生示範實驗之用。

誌謝：本文內容曾與系內許武雄、王嘉申兩位先生討論，並蒙指出若干關鍵性問題，經修正後得以完成，謹此表示衷心之謝意。文中若干瑕疵亦蒙北京大學物理系陳秉乾教授來函指正，特此致謝。

\*本文曾于 1997 年 7 月 30 日在台北市內國立台灣師範大學舉行的「中華民國物理教育學會」年會中口頭發表

## 註 釋

1. 在法拉第的鉅著《電的實驗研究》中並未給出造成感應電流的數量化公式。
2. 參閱：陳秉乾、王稼軍，〈電磁感應定律的定量表達式是怎樣得出的？〉，《大學物理》，1987 年第 3 期。
3. 法拉第曾在 1932 年留下一封密封的信件給英國皇家學會，要求此信被收藏在該會的檔案裡；這封信直到 1938 年才被發現。信中主要的內容是：他認爲電磁感應也會像水面上的波紋或空氣粒子的振動似地傳播，而且這也是光現象最可能的解釋。參閱：徐在新、宓子宏，《從法拉第到麥克斯韋》，20 頁，凡異出版社 1994 年版。
4. 爲了易于作直觀理解，我們在此處將導線視爲很長而直，所以磁力線繞著導線呈圓圈狀，具有軸對稱。
5. 法拉第發現，當兩片電容板之間夾著雲母、玻璃、臘紙等介質時，它的電容會增加。他提出分子極化的概念加以解釋。馬克斯威是一位以太論 (ether theory) 的支持者，他顯然不會認爲兩片電容板之間是真空，而應是充塞著以太。當兩板之間有隨時間變化的電場力作用時，其間的以太可能被極化而造成電流，這也許是“位移電流”這名詞的真正由來。
6. 見第 III 節之討論。