

## 驅使振動模型的自製與測試

周鑑恒 楊安中

國立台灣大學物理系  
國立中央大學物理系

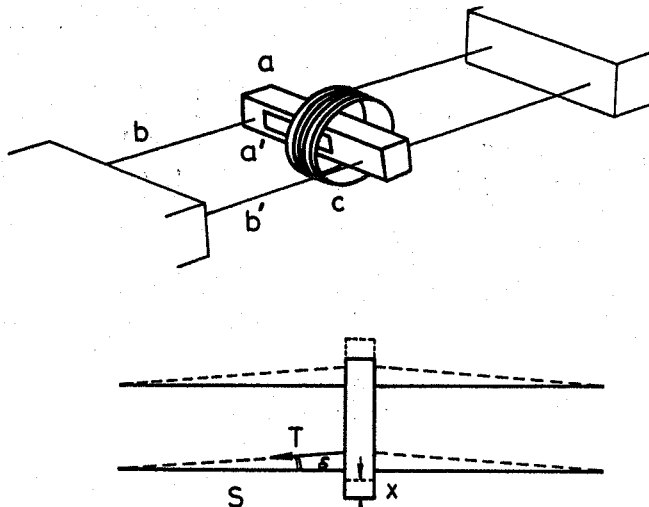
### 摘要

本文與讀者分享自製與測試驅使振動模型的實務經驗。這項模型的主要組件包括：一作簡諧扭轉振動的雙線扭擺，一徑向磁場，以及一光學量測角度振幅的裝置。以訊號產生器(function generator)將纏繞在雙線扭擺上之線圈通以交流電，使其於徑向磁場中受周期變化的驅動力，藉測頻儀及示波器之偵測，調控此驅使力之大小和頻率，以扭擺扭動時所受之空氣阻力為阻滯力，即可近似地模擬驅使振動。

本文共提出兩項實驗模型（均曾於今年二月九日至十二日台大物理系冬令營活動中示範），並設計適當的方法來分析數據。

### 一、前言

自然界中振動的現象隨處可見，但能以微分方程式簡單計算的情形並不常見。原因是自然界的振動，其回復力的大小與平衡點之距離往往並非精確的線性關係；其所受之驅動力無法以簡單之函數描述；其阻滯力也相當複雜。也就是因為驅使力和阻滯力不容易精確控制，在課堂上實驗所謂共振(resonance)時，常只能定性地加以說明。圖(一)所示是台大普通物理實驗



圖(一)為最簡易之共振模型。振動主體木塊為 a，受弦 b 及 b' 提供之回復力。線圈 c 通以交流電，對木塊中之磁鐵 a 造成周期變化之驅使力。下方為此模型所受回復力的力圖分析。

室用來顯示共振現象的模型，其中  $a$  為一木材製之振動體，內嵌一磁鐵  $a'$ ， $c$  為一線圈，此線圈聯結一訊號產生器(function generator)而載有交流電流，使得整個木塊  $a$  受力。 $b$  為兩條緊繃的釣魚線，此兩條弦上的張力均為  $T$ ，由力圖分析可知，若此振幅並不大，此振動系統所受之回復力  $F$  和其距平衡點之距離  $X$  成正比，即

$$F = -4T \sin \delta \approx -4T \tan \delta \approx -\frac{4T}{S} X。$$

其所受之阻滯力頗為複雜，但並不太大，當驅使力之頻率接近共振頻時，明顯可見木塊振動之振幅果然劇增。此模型的優點是合乎直觀理解，簡明扼要。一般學生極易經由觀察此模型獲得驅使振動和共振現象之基本概念。

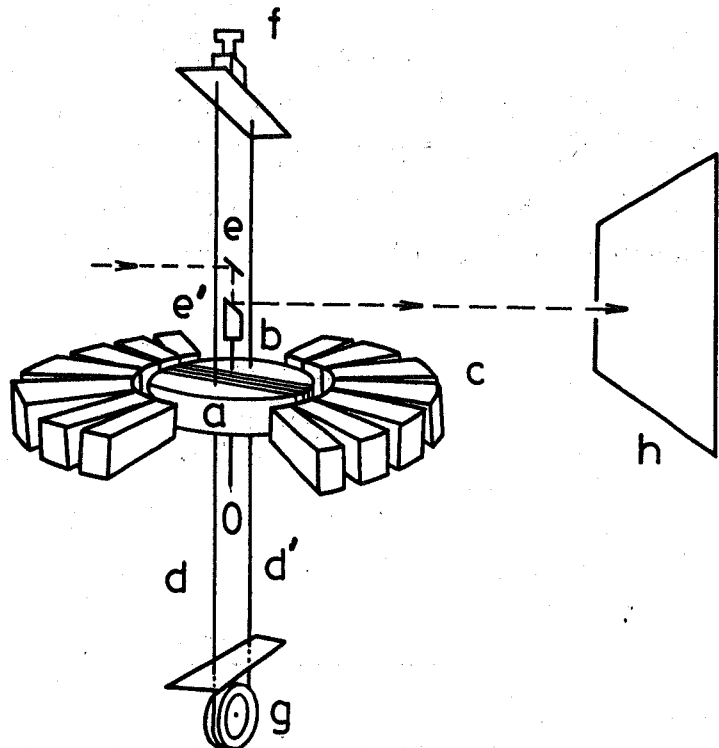
然而，對於驅使力是正弦變化的函數，阻滯力的大小和運動的速度成正比的驅使振動系統，許多普通物理教科書中均導出其公式，並交代其解。因此，設計更近似上述計算的實驗裝置以及適當的數據分析程序，對於具體聯繫微分方程式和實際的物理系統，頗具教學之價值，並能進一步滿足不同程度學生之需求。

有鑑於此，本文提出另一較為繁複的實驗設計，經分析實際測得之數據，探求此實驗模型可能的缺點，與同好共同切磋，並作進一步改進之參考。

## 二、裝置和原理

### (一)裝置

在圖(二)中， $a$  為一均勻的圓盤，厚度 0.9cm，直徑 5.4cm，為此雙線扭擺系統的主體。其上繞有 30 匝的線圈  $b$ ，此線圈於極接近轉軸  $o$  處串接一訊號產生器，以形成交流電迴路。轉軸長約 4.5cm。磁鐵組件  $c$ ，由 14 個  $3 \times 0.9 \times 0.5 \text{cm}^3$  的長方形永久磁鐵構成，以產生徑向磁場 [1]，載有物理教育第二卷第一期



圖(二)本實驗設計的簡圖，所有支架均被省略。

## 驅使振動模型的自製與測試

交流電之線圈受徑向磁場作用，而使扭擺受驅使力，此驅使力之振幅及頻率可由訊號產生器控制。此扭擺所受之回復力則由繞過一滑輪  $g$  而具相同張力之弦  $d$  及  $d'$  提供。此兩平行弦長度分別為  $60\text{cm}$ ，弦的一端由絞盤  $f$  調整張力，兩弦距  $2.2\text{cm}$ ， $e$  和  $e'$  則為與水平面夾  $45^\circ$  角且互相平行的兩面鏡子， $e$  固定不動， $e'$  隨扭擺扭動，當雷射光經  $e$  及  $e'$  反射後，在屏幕  $h$  描出雷射光點之軌跡，藉此測量振動的角度。

### (二)原理

本實驗限制扭擺扭動的角度  $\theta$  小於  $12^\circ$ 。則圖(三)所示之  $\alpha$  角更小，弦之張力  $T$ ，因扭擺扭動造成之變化即可忽略而視為定值。此弦提供扭擺對轉軸  $o$  之回復力矩即為

$$\tau = rF \cos \frac{1}{2}\theta$$

其中因為

$$\alpha \ll \theta, F = T \sin \alpha \approx T \tan \alpha \approx T \frac{x}{S}$$

$$\text{又 } x = -2(r \sin \frac{1}{2}\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \tau &= -rT \frac{1}{S} (2r \sin \frac{1}{2}\theta) \cos \frac{\theta}{2} \\ &= -r^2 \frac{T}{S} 2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta \\ &\approx -r^2 \frac{T}{S} \theta \\ &\equiv -k\theta \end{aligned}$$

此地， $k$  為常數，負號代表回復力矩的方向。經計算可知，在  $\theta$  小於  $12^\circ$  的範圍內， $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  與  $\theta$  相差在百分之一以內。

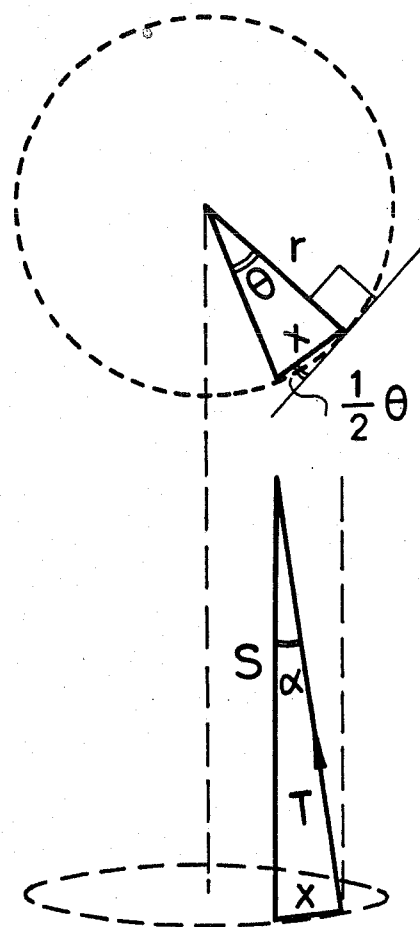
因扭擺上通以交流電之線圈受徑向磁場之作用力和  $\theta$  無關

[2]。故兩者交互作用造成之驅使力矩  $\tau_d$  與流過之電流  $i(t)$  成正比，亦即  $\tau_d \propto i(t)$ 。利用訊號產生器可以造成正弦電荷，而線圈滿足歐姆定律，所以  $\tau_d$  可以寫成  $\tau_m \cos \omega t$ ， $\tau_m$  為驅使力之振幅。

此模型的阻滯力矩主要來自整個扭擺運動時所受的阻力，假設其為  $-\eta\dot{\theta}$  [3]， $\eta$  為比例常數。若扭擺之慣量為  $I$ ，則扭擺的運動方程式即為：

$$I\ddot{\theta} = -\eta\dot{\theta} - k\theta + \tau_m \cos \omega t \quad (1)$$

經整理得



圖(三)本裝置回復力之分析力圖。

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A\cos\omega t, \quad (2)$$

其中  $\beta = \frac{\eta}{2I}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{I}$ ,  $A = \frac{\tau_m}{I}$ 。

因  $\beta$  不為零，經過遠大於  $\frac{1}{\beta}$  的時間，此方程式的解即為

$$\theta(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \gamma), \quad (3)$$

其中， $\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ ,

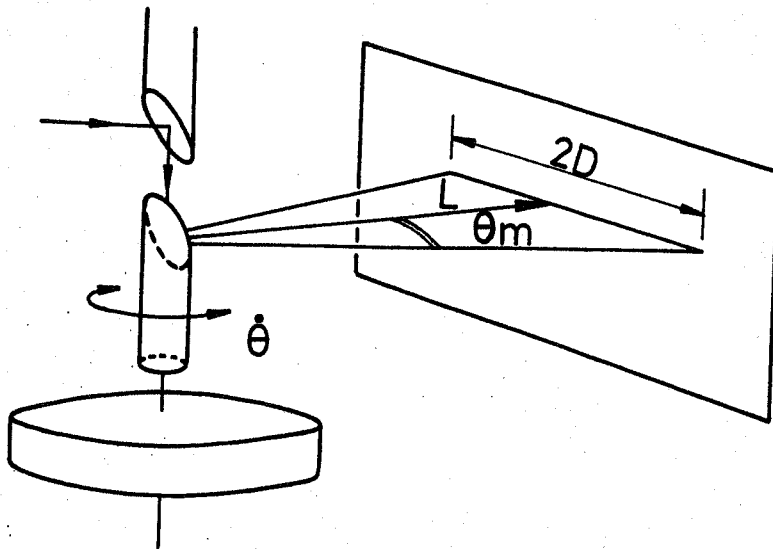
$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \equiv \theta_m(\omega), \quad (4)$$

為角度振動之振幅，是驅動力之角頻率  $\omega$  的函數。

### 三、實驗方法與數據分析

#### (一) 實驗方法

首先將訊號產生器串接扭擺線圈，輸入正弦函數之電壓，利用示波器和計頻儀，確定輸入電壓之振幅為定值，波形為正弦函數，並精確測量其頻率，以使  $\tau_d$  可以  $\tau_m \cos\omega t$  表示。

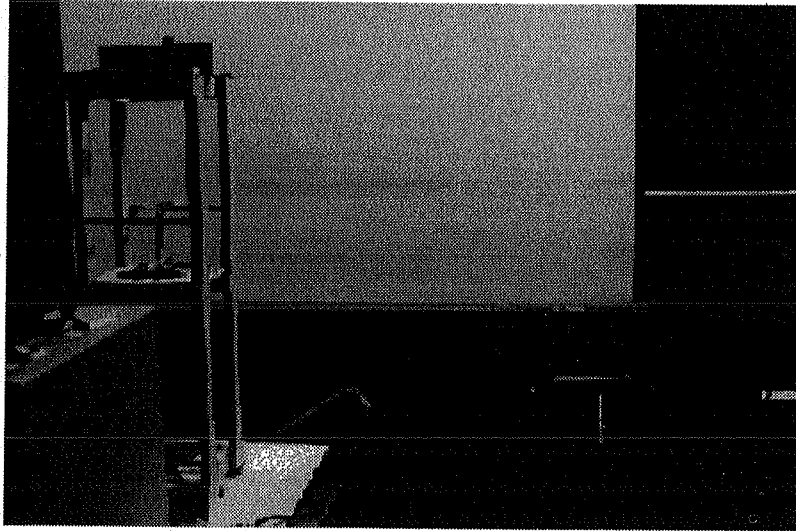


圖(四)本裝置光學測量組件的詳圖，以及其操作原理之示意圖

由低頻至高頻，依序調整  $\omega$  之大小，並藉圖(二)中雙鏡組合 e 及 e'，先由 e 鏡將雷射光反射至通過扭擺轉軸之方向入射 e' 鏡，因 e' 鏡隨扭擺扭動，亦即 e' 鏡之法平面與扭擺一起擺動。根據圖(四)，不難導得  $\theta_m(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{D(\omega)}{L}\right)$ ， $2D(\omega)$  為經鏡面 e' 所反射的雷射光，在屏幕上描出的“足跡”長度。實驗時量出  $D(\omega)$  及  $L$ ，即可得一組數據  $[\omega_i, \theta_{mi}]$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )。

## 驅使振動模型的自製與測試

圖(五)為實驗裝置之實物，左側即為振動模型，右方兩儀器，一為測頻儀，另一為示波器，左側之雷射尚未開啓。



圖(五)本裝置之實物照片。

### (二)數據分析

本實驗中， $A(=\tau_m/I)$  及  $\beta$  (與阻滯力有關) 不易直接量出，因此我們利用所得之數據  $[\omega_i, \theta_{mi}]$ ，經由最小方差法〔4〕以求出  $A(=\tau_m/I)$ ， $\beta$  及  $\omega_o$ 。方法如下：由(4)式可知驅使力之角頻率和角度振幅之關係，將該式平方後，再取其倒數，即得

$$\left(\frac{1}{\theta_m(\omega)}\right)^2 = \frac{\omega^4 + (4\beta^2 - 2\omega_o^2)\omega^2 + \omega_o^4}{(\tau_m/I)^2} \quad (5)$$

若令  $y = \left[\frac{1}{\theta_m(\omega)}\right]^2$ ， $x = \omega^2$

則(5)式可以簡化為

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad (6)$$

其中  $a = \left(\frac{I}{\tau_m}\right)^2$ ， $b = \left(\frac{I}{\tau_m}\right)^2 (4\beta^2 - 2\omega_o^2)$ ， $c = \left(\frac{I}{\tau_m}\right)^2 \omega_o^4$ ，

為一拋物線函數。

由所得之數據  $[\omega_i, \theta_{mi}]$ ，即可求出  $[\omega_i^2, \left(\frac{1}{\theta_{mi}}\right)^2] = [x_i, y_i]$ ，因理論上  $y(x) = ax^2 + bx + c$ ，利用最小方差法〔4〕，亦即對  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、微分，以求出使價差函數(cost function)

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [ax_i^2 + bx_i + c - y_i]^2 \quad (7)$$

最小的  $a$ 、 $b$ 、 $c$  值：

$$\text{即 } a = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta z}{\Delta} \quad (8)$$

$$\text{其中, } \Delta = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{vmatrix}, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum y_i & \sum x_i & n \end{vmatrix},$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i & n \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}$$

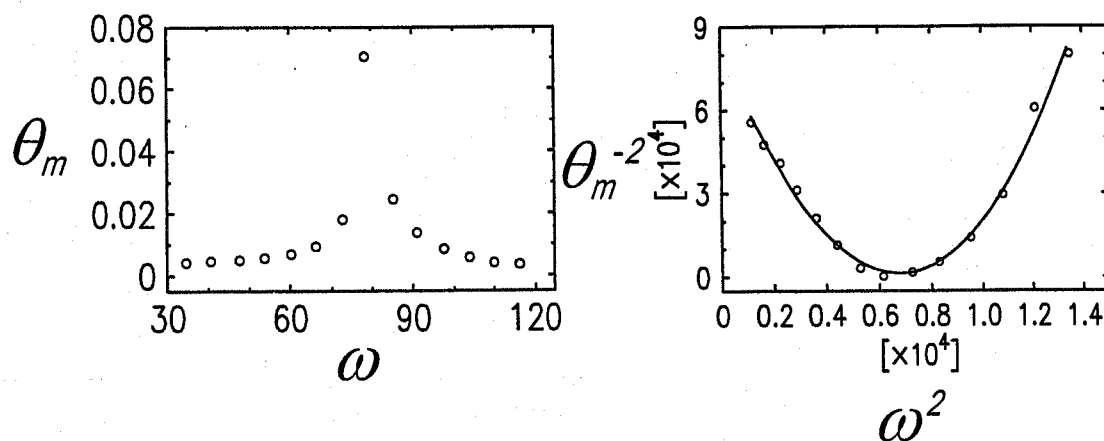
根據(8)式與  $a, b, c$  之定義，就可求得  $\tau_m / I, \beta$  及  $\omega_0$ 。

#### 四、結果與討論

圖(六)左方所示為所得之實驗數據。驅使力之角頻率  $\omega$  對角振幅  $\theta_m$  的實驗結果可知：在低頻時角振幅  $\theta_m$  為一不等於零的數值（理論上等於  $\tau_m / k$ ），當  $\omega$  接近其共振頻率時，確可見實驗所得之角振幅激增；當  $\omega$  超過共振頻率而逐漸變大時，角振幅又再減小。此實驗數據已大致成功地將  $\omega$  和  $\theta_m$  之關係表現出來。

若進一步地依上節所述的數據分析程序，將角振幅平方的倒數  $\theta_m^{-2}$  和驅使力的角頻率之平方  $\omega^2$  描繪出來，即得圖(六)右方之數據：雖這些數點，粗略地落在一近似拋物線的曲線上。但若仔細用最小方差法，切合(fitting)出一拋物線，可見理論切合的拋物線與實驗數值之間仍有若干出入；若再反推回角振幅對驅使力之角頻率的理論曲線，則可見與實驗數據亦有若干出入。

經反覆測試，這項差別應與此驅使振動系統之阻滯力未能盡如設計的要求有關。因為於不同之扭動速度時，碟形之扭擺擾動附近空氣的情形不同，



圖(六)左方為實驗所得之  $[\omega_i, \theta_{mi}]$ ；右方之圓圈代表實驗所得之  $[\omega_i^2, \theta_{mi}^{-2}]$ ，實線則為切合(fitting)所得的拋物線。 $\theta_m$  之單位為弧度。

使得阻滯力並不再只和扭擺之角速度始終成正比。此外，兩條緊繃的弦在空氣中運動時所受之複雜阻力也不再可以完全忽略；尤其是在本裝置中扭擺本

## 驅使振動模型的自製與測試

身所受的阻力並不太大，因此使得阻滯力複雜化後所造成之效應更為明顯。

改良的方法如下：(1)增加扭擺的轉動慣量  $I$ ；(2)同時增加弦的張力；(3)加大訊號產生器輸入之電壓以抑制因線圈電感衍生的可能微擾；(4)並另行設計阻滯力〔5〕，以使  $\omega_0$ ， $\tau_m/I$  的數值和性質與原先者相差不多，但因重新設計較大且更為逼近與速度成線性關係的阻滯力，相較於不易確知細節的弦阻力、轉軸摩擦力、和空氣阻力，均大得多，以使  $-\eta\dot{\theta}$  成爲較佳的逼近。

誌謝：感謝台大物理系張鏡澄老師慨借實驗場地，金工廠吳清波先生熱心協助加工，以及普物實驗室經費支助。

## 五、註釋

1. 參閱普物教科書。例如：D. Halliday et al., Fundamentals of Physics 4<sup>th</sup> ed., PP.836, 1993.
2. 同註(1)
3. 此假設經實驗證實與事實稍有出入，詳見討論。
4. 嚴格而言，價差函數(cost function)要考慮誤差(error bar)；在此情形下，須探討各儀器之特性及誤差傳遞等問題。惟此部分超出本文之範圍。
5. 也許“磁煞車”(magnetic damping)之設計更爲適合。但於此實驗中如何安排，盼舊雨新知不吝賜教。