物理教育學刊
2020, 第二十一卷一期, 42-56

Chinese Physics Education
2020, 21(1), 42-56

10.6212/CPE.202007_21(1).0003.

圓盤風扇陀螺之設計及其進動現象之分析

馮兆筠 [1]　李慧安 [1]　林倩鈺 [1]　張名宇 [1]　馮志龍 [2*]　陳柄旭 [2]

[1] 正心高級中學
[2] 國立雲林科技大學　材料科技研究所
通訊作者：fengcl@yuntech.edu.tw

（投稿日期：108 年 10 月 25 日，接受日期：109 年 2 月 25 日）

摘要：圓盤風扇陀螺係採用電力驅動的風扇，風扇馬達則固定於圓盤上。當風扇高速旋轉時，圓盤可藉由動態平衡直立起來，並隨風扇進動旋轉。本實驗設計考慮了光碟(直徑約 12cm)與塑膠圓盤(直徑約 18cm)兩種不同面積的圓盤，再利用鐵墊片、磁鐵及連接線變換等方式，設法控制角動量與淨外力矩的變化。光碟與塑膠圓盤的實驗結果皆顯示角動量愈大或淨外力矩愈小，圓盤進動旋轉現象愈不明顯，而角動量或淨外力矩的方向改變皆能造成圓盤進動旋轉方向改變。這些結果大致與理論預測相符。其中面積較大的塑膠圓盤雖可直接吸附磁鐵探究淨外力矩的影響，但相對也會受到較大風扇導引氣流的影響，以致實驗結果與理論預測有些差距。

關鍵詞：進動、動態平衡、陀螺

壹、 前言

平衡是物理的基礎觀念，維持平衡穩定也是自然界的一種趨勢。一般而言，平衡大致分為靜態平衡與動態平衡兩種，其中靜態平衡理論較為單純，而動態平衡則會涉及複雜抽象的物理機制，但卻常發生在我們週遭，譬如：陀螺轉動的動態平衡、汽車的四輪動態平衡、無人機四軸風扇動態平衡、鳥類振翅飛翔的動態平衡、以及精密機器運轉震動之動態平衡等等(米倉國小民俗小頑童, 2008; 陳正元, 1998; 戴翊展等, 2012; 劉俊彬, 1995)。這些複雜的動態平衡物理機制並非完全相同，為了輔助學生學習瞭解，本文聚焦於轉動之動態平衡實驗演示設計與分析。

根據 Benson(2019)編著的大學物理教科書 12 章第 7 節指出，轉動之動態平衡主要繫於物體轉動角速度與總角動量方向的一致性。基本上，軸向對稱的物體大致符合此條件。不過，當轉軸受外力矩影響，則還可能進一步引發進動現象，即轉軸也會旋轉，譬如：傾斜

旋轉的陀螺或地球赤道區膨脹受太陽引力較大造成的進動現象等(黃智賢, 2014; Wolfson, 2016)。進動現象的明顯程度與轉動角動量大小有關，若角動量極大，則進動現象將不明顯。過去演示轉動的動態平衡或進動現象，大多利用人力驅動的陀螺儀(gyroscope)或車輪等器具(黃智賢, 2014; Benson, 2019)，平衡時間較短且轉速不易控制。雖現今一些精密陀螺儀已發展成電力驅動，但價格不便宜且配件需加工。本文採用的圓盤風扇陀螺裝置，風扇或馬達皆可就地取材，圓盤更可利用廢棄光碟或鍋蓋，組裝方便且價格相當便宜。

其實，數年前國外已有類似的風扇光碟直立動態平衡裝置，而國內蔡正立老師(2018)則進一步將其延伸至較大尺度圓盤的動態平衡，如塑膠圓盤或鍋蓋。然而，過去大多將此裝置應用於轉動動態平衡現象的演示，即希望圓盤能保持直立平衡不動。事實上，此裝置常因風扇轉速不夠或圓盤面配件(如電池盒、馬達及風扇)質量分佈不均而引發直立圓盤的旋轉現象，這種現象可能與進動運動有關。因此，本文將探究分析圓盤風扇陀螺裝置的進動現象及影響進動的相關機制，我們考慮了兩種不同面積的圓盤(即光碟與塑膠圓盤)，分別針對影響進動運動的角動量與淨外力矩進行實驗演示分析，其中塑膠圓盤實驗能吸附磁鐵可直接探討淨外力矩的影響，而實驗結果顯示兩種圓盤風扇陀螺皆能演示進動現象及其相關物理機制，但定量分析的精確度可能會受到風扇導引氣流及其它材料或監測設備的影響。至於詳細的原理探討與實驗設計將於本文第二章節說明，而圓盤風扇陀螺製作實驗方法及實驗結果分析則分別呈現於第三、四章節，最後第五章節將作簡單的結論與建議。

貳、 原理探討與實驗設計

動態平衡與靜態平衡的主要差別在於它處於運動狀態，對於直線平移運動而言，通常動態平衡的物體在靜態也可維持平衡，但轉動運動卻不一定，轉動動態平衡的物體不一定能維持靜態平衡。因轉動動態平衡除了考慮物體的軸向對稱性外，也繫於角動量方向與軸向角速度的一致性，即如剛體角動量 L 原理(1)式所示：

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (1)$$

其中 I 表轉動慣量，ω表角速度。當繞軸轉動的角速度或轉動慣量相當大時，角動量也會變得相當大，於是，基於角動量守恆，將驅使物體維持固定的軸向動態平衡，甚至原先無法靜態平衡的物體(即淨外力矩不為零)，也可藉此方式維持固定軸向轉動的動態平衡，這種軸向固定的轉動動態平衡特性常應用於航行方向定位(黃智賢, 2014)。不過，當角動量變小時，則將會出現較為明顯的進動現象(即軸產生轉動)。因淨外力矩會造成角動量方向改變，導致軸沿淨外力矩方向移動，形成所謂的進動。我們可根據陀螺儀示意圖(Benson, 2019)加以說明，如圖 1a 所示。其中陀螺儀轉輪逆時針旋轉形成沿 $+\hat{i}$ 方向的角動量 L_0，同時，軸又因轉輪的重力形成外力矩τ，其會造成角動量變化ΔL。由(2)式推導可知ΔL 方向朝向 $+\hat{j}$ ，垂直於 L_0，合成的總角動量 L_f 如(3)式所示，而圖 1b 為其向量示意圖，可呈現合成的總角動量 L_f 朝 $+\hat{j}$ 方向偏轉Δϕ角度。換言之，沿角動量方向的軸也會朝 $+\hat{j}$ 方向偏轉。實際上，由於

陀螺儀轉動角速度遠大於其進動角速度，L_0 應遠大於ΔL，因此，ΔL 主要改變角動量方向，對於角動量大小影響極小且形成的偏轉角度Δϕ亦相當微小，瞬間角動量幾乎仍可視為守恆。不過，如果考慮外力矩持續存在，則軸將持續偏轉，最後形成軸繞 $+\hat{k}$ 呈逆時針方向的進動旋轉。

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{i} \times \left(-mg\hat{k}\right) = mgr\hat{j} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t = mgr\Delta t\hat{j} \qquad (2)$$

$$\vec{L}_f = \vec{L}_0 + \Delta\vec{L} \qquad (3)$$

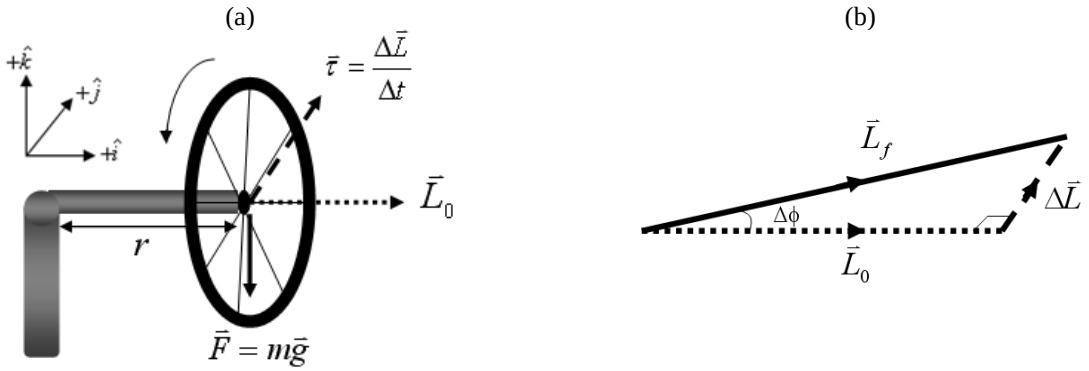


圖 1：陀螺儀及其角動量向量示意圖

其進動角速度Ω_z 可利用弧長與弳角度關係式，根據圖 1b 大略推導如下：

$$\Delta L = L_0\Delta\phi \qquad (4)$$

再將(2)式代入(4)式，即可得：

$$\Delta L = L_0\Delta\phi = \tau\Delta t \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L_0} = \Omega_z \qquad (5)$$

由(5)式可知，若角動量 L_0 維持不變，則外力矩τ與進動角速度Ω_z 成正比，而若外力矩τ維持不變，則角動量 L_0 與進動角速度Ω_z 成反比。換言之，當外力矩$\tau\to 0$ 或角動量 $L_0\to\infty$，其進動角速度$\Omega_z\to 0$，即進動現象不明顯，可傾向維持固定的軸向轉動動態平衡。

至於我們的圓盤風扇陀螺實驗裝置(馮兆筠等, 2019)如圖 2a 所示，結構類似圖 1a 的陀螺儀，原理分析示意圖如圖 2b 所示，不同之處是風扇馬達固定於圓盤上，當風扇轉軸受到外力矩作用產生進動運動，將會帶動圓盤旋轉。不過，由於風扇固定於圓盤上，轉軸是否受到外力矩影響，必須取決於圓盤本身所受到的淨外力矩，而圖 2 未加附件的淨外力矩不

為零，因圓盤背面的馬達與電池組質量比正面的風扇大，其產生的外力矩應比風扇大，故圓盤所受到的淨外力矩驅使圓盤向後轉動，導致固定於圓盤正面的風扇轉軸亦隨之向上轉，相當於風扇轉軸受外力 F_u 向上，其如圖 2b 實線箭頭所示。若風扇角動量 L_0 朝 $+\hat{i}$ 方向，則根據力矩方向判知，可產生朝 $-\hat{j}$ 方向的角動量變化量 ΔL_u，如角動量向量示意圖 3a 實線所示，造成總角動量 L_u 朝 $-\hat{j}$ 方向偏轉，即轉軸朝順時針方向進動旋轉。反之，若增加圓盤正面的質量，導致背面外力矩小於正面，則形成的淨外力矩將驅使圓盤向前轉動，固定於圓盤正面的風扇轉軸亦隨之向下轉，相當於風扇轉軸受外力 F_d 向下，其如圖 2b 虛線箭頭所示。此情形類似圖 1 結果，可產生朝 $+\hat{j}$ 方向的角動量變化 ΔL_d，如角動量向量示意圖 3a 虛線所示，總角動量 L_d 將朝 $+\hat{j}$ 方向偏轉，即轉軸會朝逆時針方向進動旋轉。然而，當風扇角動量 L_0 反轉朝 $-\hat{i}$ 方向，根據角動量向量示意圖 3b 實線所示，原朝 $-\hat{j}$ 方向的角動量變化量 ΔL_u 仍構成總角動量 L_u 朝 $-\hat{j}$ 方向偏轉，但卻變成逆時針方向進動旋轉。同理，原朝 $+\hat{j}$ 方向的 ΔL_u 角動量變化量則變成順時針方向進動旋轉，其如圖 3b 虛線所示。因此，風扇角動量方向改變會造成圓盤進動旋轉方向的改變。

今圓盤黏附的固定配件有馬達、電池盒及風扇，但風扇葉片可黏貼鐵墊片或圓盤面吸附磁鐵，甚至可改變風扇旋轉方向，進行淨外力矩與角動量大小或方向的改變，故我們的圓盤風扇陀螺實驗裝置應可演示分析進動現象的相關物理機制。

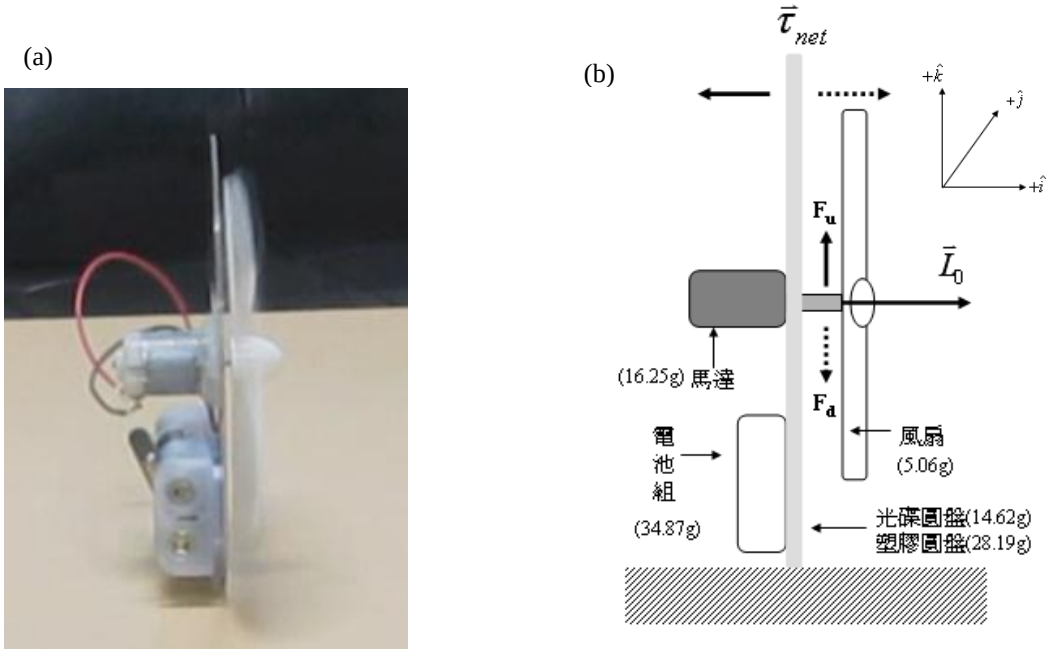
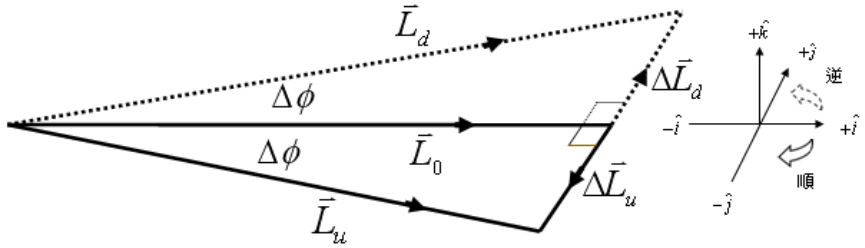


圖 2：圓盤風扇陀螺裝置及其原理分析示意圖

(a)



(b)

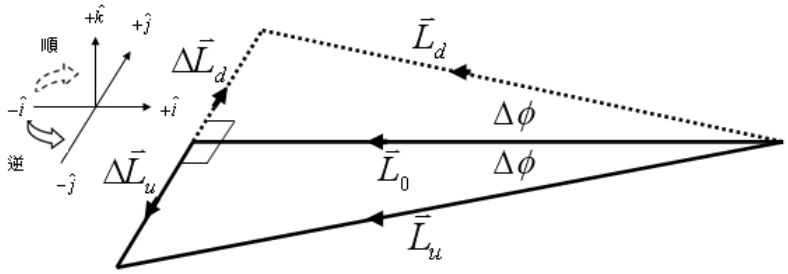


圖 3：角動量向量示意圖，其中(a)表風扇角動量 L_0 朝+i 方向；(b)表風扇角動量 L_0 朝–i 方向

參、 圓盤風扇陀螺製作與實驗方法

根據前一章節的原理探討可知，角動量與淨外力矩是影響轉動動態平衡及進動方向的主要因子，我們採用的圓盤風扇陀螺裝置可藉由風扇葉片黏附鐵墊片、圓盤面吸附磁鐵及變換電流方向等方法來改變角動量與淨外力矩，詳細的製作過程及實驗方法如下：

一、光碟圓盤風扇陀螺的製作過程與實驗設計

製作光碟圓盤風扇陀螺的材料相當簡單，大致包括：圓盤、風扇、馬達與電池盒等四項主要元件，詳細材料規格及使用工具如表 1 所示，而製作過程與實驗設計步驟如下：

(一)為了讓馬達能平穩無縫隙黏附於圓盤，首先將光碟圓盤平置於兩書縫隙處，再將馬達靜置於圓盤孔洞上，其中馬達轉軸需穿過孔洞，並注意馬達與圓盤需平穩緊靠，不可有傾斜現象，如圖 4a 所示。

(二)取出熱熔膠槍，將熱熔膠塗佈在馬達四週，如圖 4b 所示，若擔心黏附不牢固，可再滴上瞬間膠補強，約冷卻 2~3 分鐘，將光碟圓盤翻面，並再滴入瞬間膠於孔洞四周，增強馬達與圓盤間的黏附力，如圖 4c 所示，但切勿滴在馬達轉軸上，以免馬達轉軸無法運轉。

(三)約等 2~3 分鐘瞬間膠凝固後，將光碟圓盤翻面，利用雙面膠將電池盒黏附於光碟圓盤底部，但切勿突出圓盤外，並將連接線纏繞在馬達接線孔處，如圖 4d 所示。

(四)將風扇套入馬達轉軸，用力將轉軸壓進風扇，原則上，風扇愈靠近圓盤愈好，但葉片

不可打到圓盤表面，如圖 4e 所示。然後，再將 1.5V 電池裝入電池盒，即組裝完成一組圓盤風扇陀螺實驗裝置。

表 1：製作光碟圓盤風扇陀螺的材料規格與工具

序號	品名	數量	質量(g)	備註
1	光碟圓盤	1 個	14.62	光碟圓盤(直徑約 12cm)
2	四葉片風扇	1 個	5.06	風扇直徑 10cm
3	馬達	1 個	16.25	最大轉速約 30000 rpm
4	電池組	1 個	34.87	電池盒+1.5V 電池兩顆
5	小鐵墊片	2 個	1.48	每個約 0.74g
6	中鐵墊片	2 個	2.86	每個約 1.43g
7	大鐵墊片	4 個	23.28	每個約 5.82g
8	1 元硬幣	4 個	15.26	每個約 3.82g
9	5 元硬幣	4 個	17.40	每個約 4.35g
10	熱熔膠槍	1 把		工具
11	瞬間膠	1 個		工具
12	雙面膠	1 捲		工具
13	透明膠帶	1 捲		工具

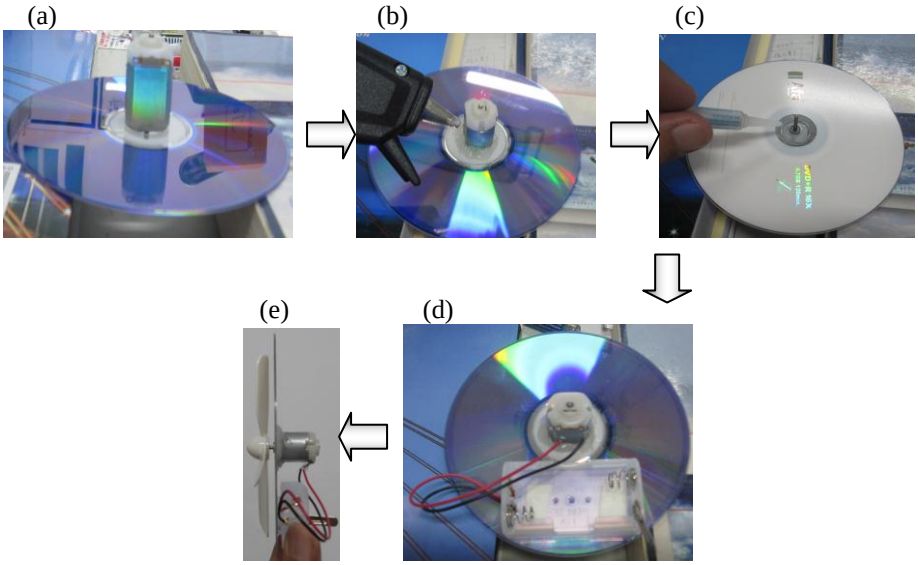


圖 4：圓盤風扇陀螺實驗裝置的製作過程

(五)我們使用的風扇為四葉片，為了改變葉片質量，我們將鐵墊片或錢幣以膠帶黏附於葉片上，但須考慮軸向對稱性，從兩個至四個葉片的黏附皆需對稱，黏附方式如圖 5，黏附物距風扇中心約 4cm。因隨著葉片鐵墊片質量增大，風扇轉動角動量也隨之增大，其中風扇維持固定的逆時針旋轉方向。然後，進行不同角動量的轉動態平衡實驗，

再利用數位攝影機記錄動態平衡狀態與進動現象，並運用電腦軟體分析進動旋轉角速度。

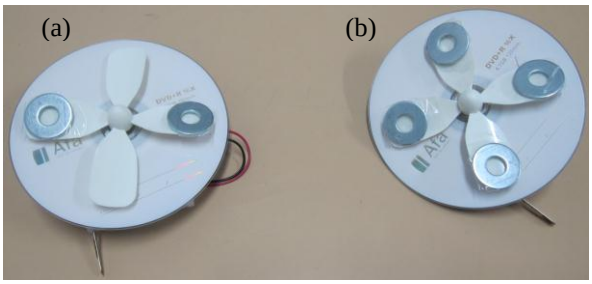


圖 5：風扇葉片黏附軸向對稱鐵墊片方式，其中(a)與(b)分別為兩個與四個鐵墊片對稱情形。

二、塑膠圓盤風扇陀螺的製作過程與實驗設計

塑膠圓盤風扇陀螺的製作過程大致與光碟圓盤風扇陀螺近似，請參閱光碟圓盤風扇陀螺的說明，不再贅述，而製作使用工具也完全相同，亦請參閱表 1，這裡僅就材料規格詳列如表 2。至於實驗設計方面，因塑膠圓盤面積較大，除了可在風扇葉片黏附鐵墊片或錢幣外，亦可利用磁鐵直接吸附在圓盤面。由於這裡採用的風扇規格與光碟圓盤風扇陀螺相同，故風扇葉片黏貼附件方式可參閱前述光碟圓盤風扇陀螺的實驗設計，這裡僅介紹磁鐵吸附圓盤面的實驗設計如下：

(一)為了降低圓盤重心高度以利平衡，並考慮質量對稱性，我們將等質量磁鐵吸附在圓盤電池盒兩側，大約距盤底高度約 2.5cm，距盒中心約 3.5cm，如圖 6 所示。

表 2：製作塑膠圓盤風扇陀螺的材料規格

序號	品名	數量	質量(g)	備註
1	塑膠圓盤	1 個	28.19	塑膠圓盤(直徑約 18cm)
2	四葉片風扇	1 個	5.06	風扇直徑 10cm
3	馬達	1 個	16.25	最大轉速約 30000 rpm
4	電池組	1 個	34.87	電池盒+1.5V 電池兩顆
5	大鐵墊片	4 個	23.28	每個約 5.82g
6	10 元硬幣	4 個	30.08	每個約 7.52g
7	磁鐵 A	2 個	16.24	每個約 8.12g，長約 1.0cm
8	磁鐵 B	2 個	6.76	每個約 3.28g，長約 4.0mm
9	磁鐵 C	2 個	12.24	每個約 6.12g，長約 1.0cm
10	磁鐵 D	2 個	3.12	每個約 1.56g

(二)由於塑膠圓盤為非鐵磁性物質，若需吸附磁鐵，圓盤兩面皆需有磁鐵相互吸引，但因原本圓盤背面的馬達與電池組質量較大，為了平衡或改變淨外力矩，我們在圓盤正面吸附質量較大的磁鐵，如圖 6 所示，然後，持續增加正面磁鐵質量進行實驗，並以數

位攝影機與電腦軟體記錄分析進動旋轉角速度。

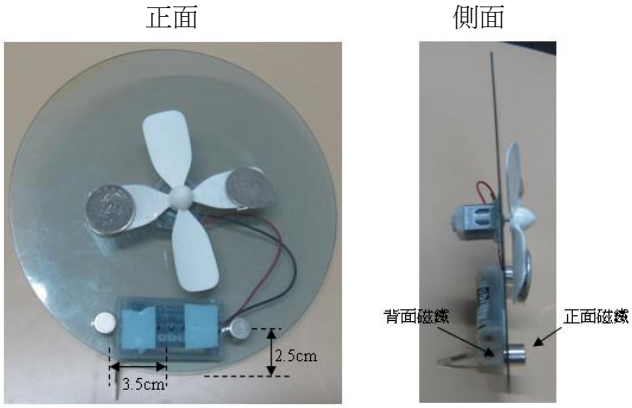


圖 6：塑膠圓盤風扇陀螺吸附磁鐵位置示意圖

三、進動旋轉方向改變的實驗設計

根據第二章節圓盤風扇陀螺進動旋轉方向的理論分析，可知風扇旋轉角動量 L_0 方向及作用於圓盤的淨外力矩方向，皆可能造成進動旋轉方向的改變，我們將採用光碟與塑膠圓盤風扇陀螺進行以下的實驗設計：

(一)欲改變風扇角動量方向，僅需改變風扇旋轉方向即可，我們可將電池盒與馬達連接的紅黑線交換即可，如圖 7 所示。若輸入馬達的電流方向改變，則馬達帶動風扇旋轉方向就會發生改變。圖 7a 與 7b 分別為風扇逆時針方向與順時針方向旋轉的接線方式。

然後，進行轉動動態平衡實驗，再以數位攝影機與電腦軟體記錄分析進動旋轉角速度。

(二)欲改變圓盤所受淨外力矩的方向，可利用風扇葉片黏附鐵墊片及圓盤吸附磁鐵等兩方式進行，相關的實驗方式已在前述光碟與塑膠圓盤風扇陀螺的實驗設計中介紹。

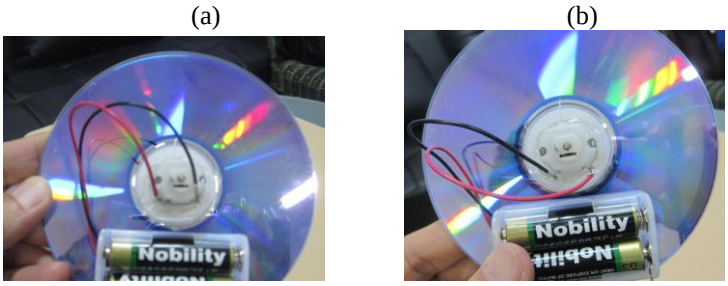


圖 7：風扇旋轉方向改變之接線圖，其中(a)、(b)分別為風扇逆時針與順時針旋轉的接線方式。

肆、 實驗結果與分析

依循上一章節的實驗設計或方法，我們獲得許多有趣的實驗結果與分析，不僅符合理論預測，也有助於瞭解相關物理機制的運作，詳細內容如下:

一、光碟圓盤風扇陀螺實驗分析結果

光碟圓盤風扇陀螺的實驗設計係以風扇葉片質量改變角動量，其中葉片質量的改變依序由兩葉片至四葉片以軸向對稱黏附鐵墊片或錢幣，風扇則維持固定的逆時針旋轉。基本上，若風扇葉片不加鐵墊片，我們的圓盤風扇陀螺無法維持轉動動態平衡，因葉片加上鐵墊片可增大風扇角動量有助於維繫轉動動態平衡。然而，由於圓盤背面的馬達與電池組質量較大，對圓盤造成的淨外力矩會驅使圓盤傾向朝後轉，根據第二章節原理探討分析，應會構成順時針方向的進動旋轉。然而，隨著圓盤正面的風扇葉片質量逐漸增大，圓盤淨外力矩大小會發生改變，甚至方向也會改變，因此，我們根據圓盤黏附物件重心及其所受重力大小粗略估算圓盤的淨外力矩。表 3 呈現了圓盤背面馬達與電池組的總外力矩及正面風扇的總外力矩，結果發現當背面總外力矩大於正面總外力矩時，圓盤都呈現順時針進動旋轉。反之，則呈現逆時針進動旋轉，此結果大致符合理論預測。另外，葉片質量增大會導致風扇角動量 L_0 變大，角動量 L_0 愈大，轉動動態平衡會愈趨於固定軸向平衡，進動現象將不明顯，即進動角速度會愈來愈小，表 3 可證實此現象。不過，原理探討分析章節中也提及淨外力矩大小會影響進動現象。我們從表 3 確實可發現順時針進動方向(即 Case A~F)的進動角速度隨淨外力矩減小而減小，即進動現象不明顯。可是，當進動方向改變時，卻非如此。我們比較表 3 的 Case F 與進動方向相反的 Case G 之淨外力矩，發現 Case G 之淨外力矩較大，但進動角速度卻仍減小。主要原因可能是 Case G 的風扇總質量增大形成較大的風扇角動量 L_0，雖其淨外力矩變大，但風扇角動量 L_0 也增大，故進動現象仍較不明顯。綜言之，風扇葉片質量的增大可瞭解淨外力矩對進動方向及角速度的影響，而進動方向反轉後之相關分析可呈現風扇角動量的影響。

表 3：光碟圓盤風扇陀螺之風扇葉片質量變化對進動的影響分析

Case	風扇葉片黏附物件 總質量(風扇+物件)	圓盤正面與背面 總外力矩(N·m)	淨外力矩 (背−正)	進動方向	進動平均角 速度(rad/s)
A	小鐵墊片×2 總質量約 6.54g	正面: 0.00071 背面: 0.00367	0.00296	順時針	3.46
B	中鐵墊片×2 總質量約 7.92g	正面: 0.00085 背面: 0.00367	0.00282	順時針	1.81
C	1 元錢幣×2 總質量約 12.70g	正面: 0.00137 背面: 0.00367	0.00230	順時針	1.01
D	大鐵墊片×2 總質量約 16.70g	正面: 0.00180 背面: 0.00367	0.00187	順時針	0.90
E	1 元錢幣×4 總質量約 20.34g	正面: 0.00219 背面: 0.00367	0.00148	順時針	0.59
F	大鐵墊片×4 總質量約 28.34g	正面: 0.00306 背面: 0.00367	0.00061	順時針	0.26
G	大鐵墊片×4+5 元錢幣×4 總質量約 40.74g	正面: 0.00439 背面: 0.00367	−0.00072	逆時針	0.23

二、塑膠圓盤風扇陀螺實驗分析結果

塑膠圓盤風扇陀螺因圓盤面積較大，實驗設計分別規劃了風扇葉片黏附物件及圓盤面吸附磁鐵兩部份的實驗演示分析。首先，有關風扇葉片黏附物件的實驗結果，我們依循光碟圓盤風扇陀螺之分析方式可得到表 4，發現其大致與光碟圓盤風扇陀螺的實驗結果近似。當風扇葉片質量增大時，會導致風扇角動量增大且淨外力矩減小，實驗分析的進動角速度也隨之減小，而當淨外力矩方向改變時，進動角速度仍繼續減小，亦可呈現風扇角動量的貢獻。不過，淨外力矩方向發生改變的 Case 卻與進動方向發生改變的 Case 不同，淨外力矩方向改變出現於 Case L，而進動方向改變卻發生於風扇質量較大的 Case M，此情形並未出現在光碟圓盤風扇陀螺的實驗分析結果中。由於光碟或塑膠圓盤風扇陀螺的主要附件皆相同，故研判可能與圓盤面積大小有關。塑膠圓盤面積較大，可能遭受風扇導引氣流影響較大，以致造成理論估算的淨外力矩方向改變不能立即反映進動方向的改變。

表 4：塑膠圓盤風扇陀螺之風扇葉片質量變化對進動的影響分析

Case	風扇葉片黏附物件 總質量(風扇+物件)	圓盤正面與背面 總外力矩(N·m)	淨外力矩 (背−正)	進動方向	進動平均角 速度(rad/s)
H	大鐵墊片×2 總質量約 16.70g	正面: 0.00180 背面: 0.00367	0.00187	順時針	1.01
I	10 元硬幣×2 總質量約 20.10g	正面: 0.00217 背面: 0.00367	0.00150	順時針	0.89
J	大鐵墊片×4 總質量約 28.34g	正面: 0.00306 背面: 0.00367	0.00061	順時針	0.79
K	10 元錢幣×4 總質量約 36.34g	正面: 0.00392 背面: 0.00367	0.00025	順時針	0.49
L	10 元錢幣×4+大鐵墊片 ×2 總質量約 47.98g	正面: 0.00517 背面: 0.00367	−0.00150	順時針	0.42
M	10 元錢幣×4+大鐵墊片 ×4 總質量約 59.62g	正面: 0.00643 背面: 0.00367	−0.00276	逆時針	0.08

其次，有關圓盤面吸附磁鐵的實驗結果，由於風扇質量維持固定，磁鐵吸附圓盤面可直接改變淨外力矩，不會涉及風扇角動量的變化。當圓盤未吸附磁鐵時，風扇黏附物件係採用表 4 的 Case I，而前述實驗結果分析可知其背面馬達與電池組造成的總外力矩較大，淨外力矩驅使圓盤面傾向往背後轉，導致圓盤呈順時針進動旋轉。於是，根據實驗設計，我們在圓盤正面開始增加磁鐵質量，則淨外力矩將隨之減小，若持續增加，甚至會反向。詳細的淨外力矩估算結果及進動方向與角速度分析如表 5 所示。可發現隨著圓盤正面磁鐵質量的持續增加，淨外力矩會先減小，直至方向改變後又增大，而實驗分析的進動角速度變化也隨之減小而增大，進動方向也發生改變，大致符合理論預測。不過，卻仍出現前述相同情況，即淨外力矩方向發生改變的 Case 與進動方向改變的 Case 不同，淨外力矩方向改變發生於 Case P，但進動方向改變卻發生於風扇質量較大的 Case Q。顯然其中必有其它外力矩因子，增強了圓盤背面總力矩，以致正面需要更大質量的磁鐵才能平衡。因為風扇導引

的氣流會直接作用於圓盤面，故推測風扇導引氣流可能是影響的外力矩因子。

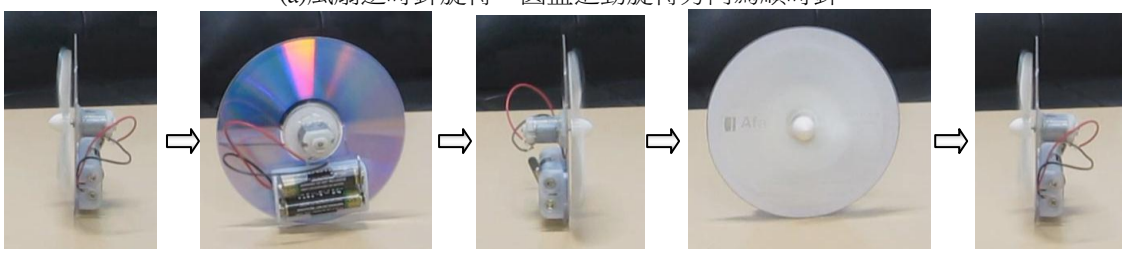
表 5：利用磁鐵吸附圓盤改變淨力矩造成進動旋轉方向及角速度之變化情形

Case	圓盤兩面吸附磁鐵類型與總質量 (正面表風扇面,背面表電池面)	圓盤正面與背面總力矩(N·m)	淨外力矩 (背−正)	進動旋轉方向	進動旋轉平均角速度(rad/s)
N	未加磁鐵(同 Case I) 風扇總質量約 20.10g	正面:0.00217 背面:0.00367	0.00150	順時針	0.89
O	正面[磁鐵 A×2]:16.24g 背面[磁鐵 D]:3.12g	正面:0.00296 背面:0.00369	0.00073	順時針	0.87
P	正面[磁鐵(A+B)×2]:23.00g 背面[磁鐵 D]: 3.12g	正面:0.00374 背面:0.00369	–0.00005	順時針	0.84
Q	正面[磁鐵(A+C)×2]:28.48g 背面[磁鐵 D]: 3.12g	正面:0.00496 背面:0.00369	–0.00127	逆時針	0.17
R	正面[磁鐵(A+B+C)×2]: 35.24g 背面[磁鐵 D]: 3.12g	正面:0.00631 背面:0.00369	–0.00262	逆時針	0.28

三、進動方向改變的實驗分析結果

由於光碟與塑膠圓盤風扇陀螺之實驗設計涵蓋了淨外力矩方向的改變，故有關淨外力矩對進動方向影響的實驗結果請參閱前述兩項分析結果，這裡僅介紹風扇角動量方向改變對進動方向影響的實驗分析結果。首先，風扇葉片質量係採用表 3 的 Case D 條件，光碟風扇陀螺的實驗結果如圖 8 所示。其中圖 8a 顯示風扇逆時針旋轉時，圓盤會產生順時針進動旋轉，此結果如同表 2 的 Case D，而圖 8b 則顯示風扇改為順時針旋轉時，圓盤變為逆時針進動旋轉。至於塑膠圓盤的風扇葉片也採用相同的 Case D 或 Case H 條件，其實驗結果類似光碟風扇陀螺，如圖 9 所示。因此，兩種圓盤風扇陀螺皆能證實理論的預測，即改變風扇角動量方向會造成進動方向的改變。

(a)風扇逆時針旋轉，圓盤進動旋轉方向為順時針



(b)風扇順時針旋轉，圓盤進動旋轉方向為逆時針

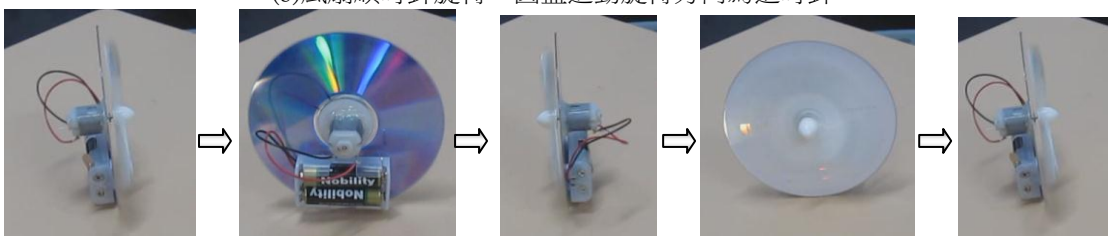
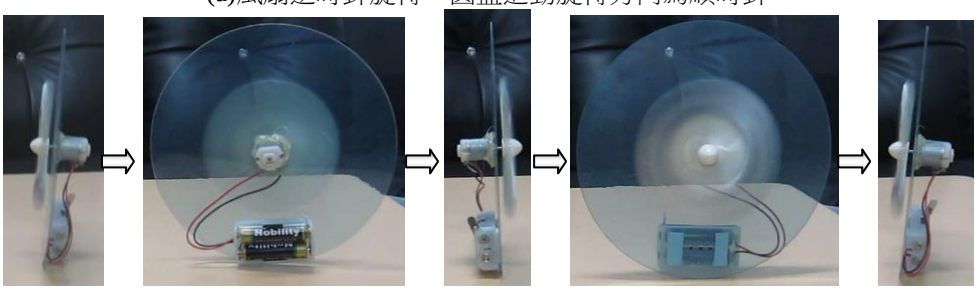


圖 8：光碟圓盤風扇旋轉方向改變對進動旋轉方向的影響

(a)風扇逆時針旋轉，圓盤進動旋轉方向為順時針



(b)風扇順時針旋轉，圓盤進動旋轉方向為逆時針

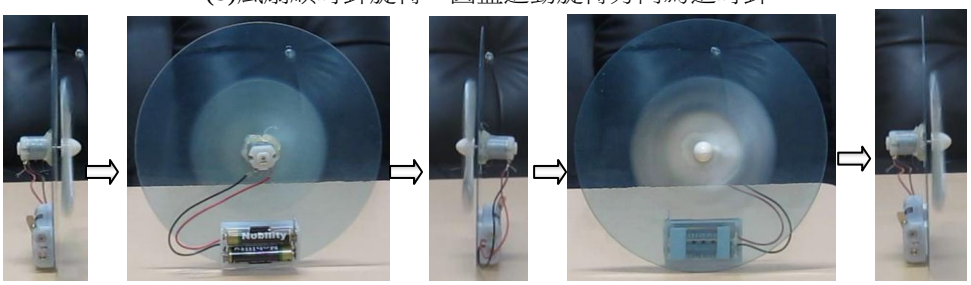


圖 9：塑膠圓盤風扇旋轉方向改變對進動旋轉方向的影響

其次，如果進一步分析比較兩種圓盤風扇陀螺的順逆進動方向的角速度，結果如表 6 所示，我們發現光碟風扇陀螺的進動角速度比較接近。理論上，若僅有風扇角動量方向的改變，應不會影響進動角速度，故光碟風扇陀螺比較符合理論。換言之，此結果也再度凸顯出塑膠圓盤面積大可能受氣流影響較大，因爲風扇順逆不同方向旋轉會導引不同方向氣流，影響圓盤淨外力矩，進而導致順逆進動方向的角速度差距擴大。

表 6：不同風扇旋轉方向的進動旋轉角速度

圓盤類型	(風扇順時針旋轉) 圓盤逆時針進動角速度	(風扇逆時針旋轉) 圓盤順時針進動角速度
光碟圓盤(直徑約 12cm)	0.85 rad/s	0.90 rad/s
塑膠圓盤(直徑約 18cm)	0.45 rad/s	1.01 rad/s

伍、 結論與建議

我們利用光碟與塑膠圓盤風扇陀螺順利地完成進動現象之演示分析，其中風扇葉片黏附鐵墊片可增加角動量或減小淨外力矩，兩種圓盤風扇陀螺的實驗結果皆可呈現進動角速度減小，即進動現象不明顯的趨勢。當淨外力矩方向改變，兩種陀螺的進動方向皆發生改變且皆能區別出風扇角動量的影響，但塑膠圓盤風扇陀螺的進動方向改變與理論估算的淨外力矩方向改變發生於不同的風扇質量，進動方向改變發生於較大的風扇質量。若進一步將面積較大的塑膠圓盤面吸附磁鐵直接演示分析淨外力矩的影響，雖可大略呈現淨外力矩與進動角速度的正比關係，但仍發現進動方向改變與估算的淨外力矩方向改變之不符情

形。另外，改變風扇角動量方向，兩種圓盤風扇陀螺皆能得到相反的進動方向，但進動角速度的分析卻發現塑膠圓盤風扇陀螺在不同進動方向出現較大的角速度差異，比較不符合理論預期結果。因此，我們認為面積較大的塑膠圓盤可能受風扇氣流影響較大，以致實驗結果與理論出現些許落差。至於相關演示分析的部份動態影像檔儲存於 Google 雲端硬碟，讀者可點選以下網址：

https://drive.google.com/drive/folders/1pf6Y4IMaSsipxIGrCF11aR6UdsFsbf6d?usp=sharing

其實，面積較大的塑膠圓盤因馬達與風扇的位置較高，造成整個陀螺系統的質心或重心偏高。理論上，重心偏高不利於平衡。所以，圓盤風扇陀螺的設計將質量最大的電池組件黏附於圓盤底部，而磁鐵也是吸附於圓盤底部附近。若非如此，圓盤風扇陀螺進動旋轉時，直立平衡相當容易被破壞。

因此，綜合以上分析比較，並考慮其它一些運作問題及未來教學上的輔助學習應用，我們大致歸納成以下幾項結論與建議：

一、實驗過程與材料的改進

(一)圓盤面積愈大，除了氣流影響會比較顯著，也會導致陀螺系統重心偏高，不利於平衡，因此，建議使用較小的光碟圓盤風扇陀螺。

(二)圓盤風扇陀螺運作於傾斜的表面易產生滑動，而表面若有明顯紋路或沙粒也會阻礙圓盤進動旋轉，故建議應儘量挑選水平且光滑的表面進行實驗。

(三)圓盤風扇陀螺的馬達轉速高，耗電量高，電池難以長時間維持穩定電壓，建議使用強效電池或實驗時間不宜過長。

二、圓盤風扇陀螺裝置的限制

由於圓盤風扇陀螺的馬達會受到風扇葉片質量變化或電池電壓變動的影響，可能導致轉速會有變動，最好能即時監測風扇的高轉速，但目前欠缺高轉速監測系統，以致無法精確掌握角動量變化，故從事精密的定量分析可能會有限制。另外，葉片黏附鐵墊片，將會同時影響風扇角動量與圓盤淨外力矩。若要將兩者影響分開考慮，則必須採用較大的圓盤，此時氣流的影響又會增大，這也是圓盤風扇陀螺實驗演示分析的一項限制。

三、教學應用的探討

由於圓盤風扇陀螺取材容易且組裝方便，非常適合動手 DIY 製作，可讓學生從中體會組裝樂趣及相關的物理觀念。另外，此裝置經由我們的實驗設計，可粗略控制風扇角動量與淨外力矩的變化，能夠進行定性或定量的演示分析，有助於學生理解轉動動態平衡特性與圓盤進動旋轉現象。尤其價格低廉且能呈現有趣的圓盤直立平衡現象，相較於過去發展的陀螺儀或車輪等演示裝置，毫不遜色，非常值得推廣於中小學科教實驗。

致謝

感謝博揚儀器公司黃立峰先生及蔡正立老師提供相關材料與設備，而本文相關內容曾製作海報於「2019 年中華民果物理教育年會」展出，期間獲得海報評審委員及一些與會學者許多寶貴建議。此外，投稿「物理教育學刊」期間也獲得學刊評審委員許多卓越見解與意見，特此一併致謝。

參考文獻

1. 米倉國小民俗小頑童 (2008)：陀螺遊藝館－陀螺運動原理。第九屆台灣學校網界博覽會，網址：http://163.20.104.53/97toro/home/game/ga2.htm。
2. 黃智賢 (2014)：搞定陀螺儀－從傳統到現代。物理雙月刊，36(3)，228-235。
3. 陳正元 (1998)：普通生物學報告─鳥類的飛翔。普通生物學報告，網址：http://www.ck.tp.edu.tw/~jychen/birdfly.htm。
4. 馮兆筠、李慧安、林倩鈺、林柏亨、馮志龍 (2019)：旋轉動力平衡之實驗設計與分析應用。2019 全國物理教育聯合會議。嘉義：國立嘉義大學。
5. 蔡正立 (2018)： 轉動慣量陀螺儀。翔飛文教機構－蔡正立科學實驗室，網址：https://www.facebook.com/scienceTsai/videos/2072046876386283/。
6. 劉俊彬 (1995)： 旋轉機械動態平衡之研究。中原大學機械工程研究所碩士論文。
7. 戴翊展、黃寶強、徐碧生 (2012)：四旋翼直升機之平衡控制。國立宜蘭大學工程學刊第 8 期，152-170。
8. Benson, H. (2019) University Physics 3rd revised ed.(pp.248) Taiwan (R.O.C.): Ting Lung Book Co.
9. Benson, H. (2019) University Physics 3rd revised ed.(pp.250-251) Taiwan (R.O.C.): Ting Lung Book Co.
10. Wolfson, R. (2016) Essential University Physics Volume I 3rd ed.(pp.214-216) USA: Pearson Education limited.

The design of disk-fan spinning top and the analysis of its precession phenomenon

Chao-Yun Feng[1], Hui-An Lee[1], Qian-Yu Lin[1], Ming-Yu Chang[1], Chi-Lon Fern[2*], and Bing-Syu Chen[2]

[1]Sacred Hearts High School
[2]Graduate School of Materials Science, National Yunlin University of Science and Technology
*Corresponding author: fengcl@yuntech.edu.tw

Abstract

The device of disk-fan spinning top is made of an electricity-power fan fixed on disk. When the fan spins at high speed, the disk can rotate due to the fan's precession and stand vertically due to dynamical equilibrium. The experimental design considers two different sizes of plates: a CD (about 12 cm in diameter) and a plastic disk (about 18 cm in diameter). We use the iron pad and the magnet, or change the connecting wire to control the variation of the angular momentum and the net torque. Results show that the bigger angular momentum or smaller net torque causes the less obvious precession phenomenon. Moreover, the different direction of the angular momentum and the net torque cause the different direction of the precession. Our results almost correspond to theoretical predictions. Although the larger plastic disk can directly be attached a magnet to explore the influences on net torque, it is affected by larger airflow, occurring some deviation between the experiment result and the theoretical prediction.

Key words： precession, dynamic equilibrium, spinning top