

# 司乃耳折射定律的推廣與應用

陳俊霖

國立彰化師範大學 物理學系

(投稿日期：民國 96 年 5 月 2 日，修訂日期：96 年 8 月 30 日，接受日期：96 年 9 月 13 日)

**摘要：**經過深入的探討，我們可以將彩虹形成的原因解釋得更為清楚，並利用司乃耳折射定律發展出更為精確的一種測量折射率的新方法。另外，我們也利用司乃耳折射定律避開變分法複雜的數學技巧，成功的解決積分的極值問題。在這篇論文中作者透過新的看法與思路，將這些發生在日常生活中的物理現象看得更為透徹，而且其原理分析起來也更為簡單。作者希望藉由這些分析方法的介紹，讓學生對於物理的學習變為一件好玩又有趣的事情。

**關鍵詞：**司乃耳定律、彩虹成因、折射率

## 壹、前言

談到有關於彩虹形成的原因，在一般的教科書上都會寫著：在給定折射率  $n$  值的情況下，取從水珠射出的光線與地平線夾角  $\alpha$  的極大值即是彩虹形成的角度[1]，不過卻沒有說明取極大值的意義何在？在本文中作者詳加說明了取極大值的有極重要的意義，當  $\alpha$  為極大值時，則從水珠射出的光線的強度必定為極大值，於是在  $\alpha = 42^\circ$  處形成了彩虹。此外，利用司乃耳折射定律我們可以發展出更為精確的一種測量折射率的新方法。

其次，關於光在變折射率介質中的行進軌跡 [2]，我們如果想要完整的解出這個問題，則必須學習數學的變分法，但是其中的

數學技巧過於艱深，很難讓一般的中學生甚至大一的學生理解。有鑑於此，作者建議可以運用司乃耳折射定律來取代變分法複雜的數學技巧，使得學過基礎微積分的學生都可以輕易的處理積分極值的問題，於是就可以用這個簡單的方法解決最速落徑以及懸鏈線等歷史上物理數學的難題。最後，我們可以將這個方法推廣到求解任意函數  $f = f(x)$  之積分極值問題。

## 貳、彩虹形成的原因與數學的極大(小)值之間的關係

這一節的主要內容是將數學上極大(小)值的概念引入光的折射現象中，進而解釋彩

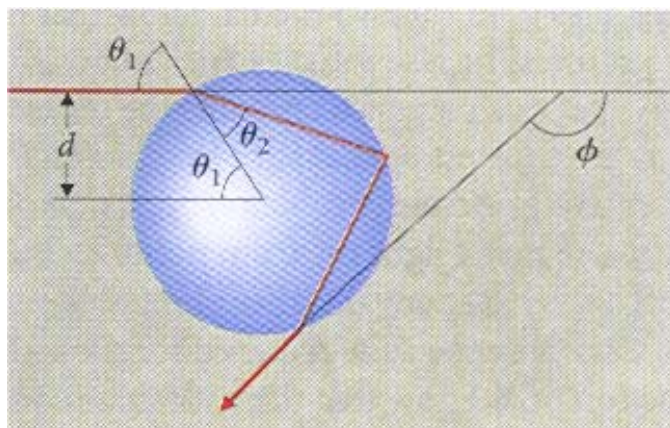


圖 1：光線在一小水珠中經過兩次折射與一次反射的情形

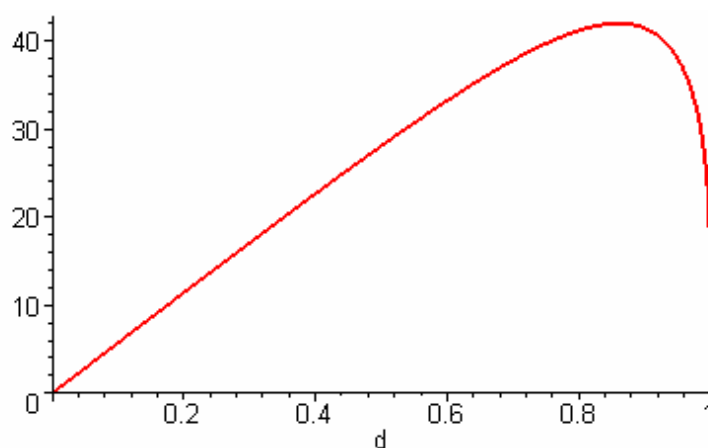


圖 2： $\alpha$  與  $\bar{d}$  的函數關係圖

虹形成的原因。此外也可以利用射入水珠的光線與從水珠射出的光線之間的夾角與折射率之間的關係，得到一種新的測量折射率的方法。

圖 1 為光線在一小水珠中經過兩次折射與一次反射的情形，如果太陽光照射在像這樣的許多小水珠上，則會形成彩虹。從圖一中我們可以計算出射入水珠的光線與從水珠射出的光線之間的夾角滿足以下關係式[1]

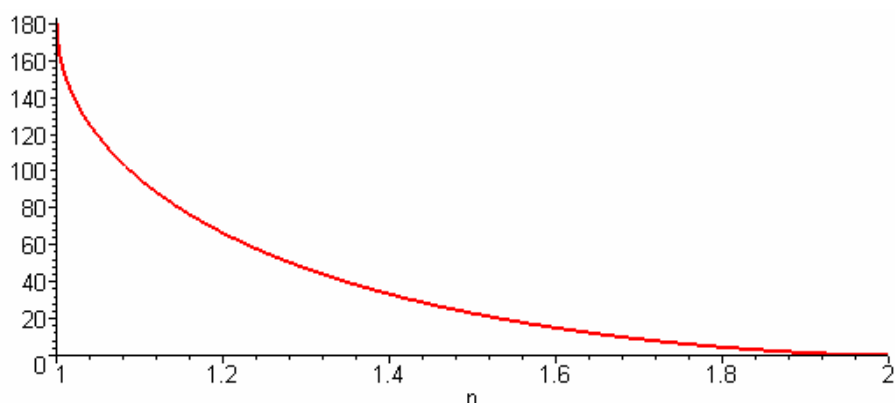
$$\phi = \pi + 2\theta_1 - 4\sin^{-1}(\sin\theta_1/n) \quad (1)$$

從圖 1 知  $\sin\theta = d/R = \bar{d}$ ， $R$  為水珠之半徑。於是從水珠射出的光線與地平線的夾角為

$$\alpha = \pi - \phi = 4\sin^{-1}(\bar{d}/n) - 2\sin^{-1}(\bar{d}) \quad (2)$$

其中  $n$  為水珠之折射率。

在一般的教科書上都會寫著：在給定折射率  $n$  值的情況下，取  $\alpha$  的極大值，即可得到彩虹與地平線形成的  $42^\circ$  夾角[1]，不過卻沒有說明取  $\alpha$  的極大值的意義何在？以下我

圖 3： $\alpha_{\max}$  與折射率  $n$  的函數關係圖表 1： $\alpha_{\max}$  與其相對應的折射率  $n$  值

$\alpha_{\max}$	20	22	24	26	28	30	32	34
折射率 $n$	1.5328	1.5094	1.4874	1.4666	1.4470	1.4283	1.4106	1.3938
$\alpha_{\max}$	36	38	40	42	44	46	48	50
折射率 $n$	1.3777	1.3623	1.3476	1.3335	1.3200	1.3071	1.2947	1.2827

就針對這個問題詳加說明。令  $n = 4/3$ ，將(2)式中  $\alpha$  與  $\bar{d}$  的關係畫成圖 2。現在假設入射光束的寬度為  $\delta$ ，由圖 2 知其所對應的  $\alpha$  值必定有一寬度  $\Delta$ ，但是如果入射光束的位置恰好在  $\alpha$  的極大值，即當  $\bar{d} = 0.86$  對應於  $\alpha = 42^\circ$  時，則  $\alpha$  值的寬度  $\Delta$  必定變得極為狹窄，換言之，此時從水珠射出的光線的強度必定為極大值，於是形成了彩虹，因此  $\alpha = 42^\circ$  即為圖 2 中彩虹形成的角度。

此外，由(2)式中取  $\alpha$  的極大值得出

$$\bar{d} = \sqrt{(4-n^2)/3} \quad (3)$$

將(3)式代入(2)式中，可得出  $\alpha$  的極大值  $\alpha_{\max}$  與折射率  $n$  的函數關係式，

$$\alpha_{\max} = 4 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} \right) - 2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \right) \quad (4)$$

圖 3 為  $\alpha_{\max}$  與折射率  $n$  的函數圖。如果光束照射過某一液體的  $\alpha_{\max}$  可以被精確測量，那麼由(4)式的關係式可推得出此液體的折射率  $n$ 。由於圖 3 應用在實際的測量上很不方便，於是為了方便由  $\alpha_{\max}$  的量測查出與其相對應的折射率  $n$  之值，我們利用圖 3 的結果製作了表一。只要測量出某一液體的  $\alpha_{\max}$ ，我們即可以利用表一查出此液體相對應的折射率  $n$  值，這可以用來做為一種新的測量折射率的方法，而且實驗的誤差可小於 1%。

在實驗上我們將一個圓柱桶狀的容器注入待測的液體(如圖 4 利用裝 CD 的塑膠圓柱桶即可)，並使用雷射筆射出的光束當光源並仔細地觀察  $\alpha$  值之變化情形，當  $\alpha$  為極大值的

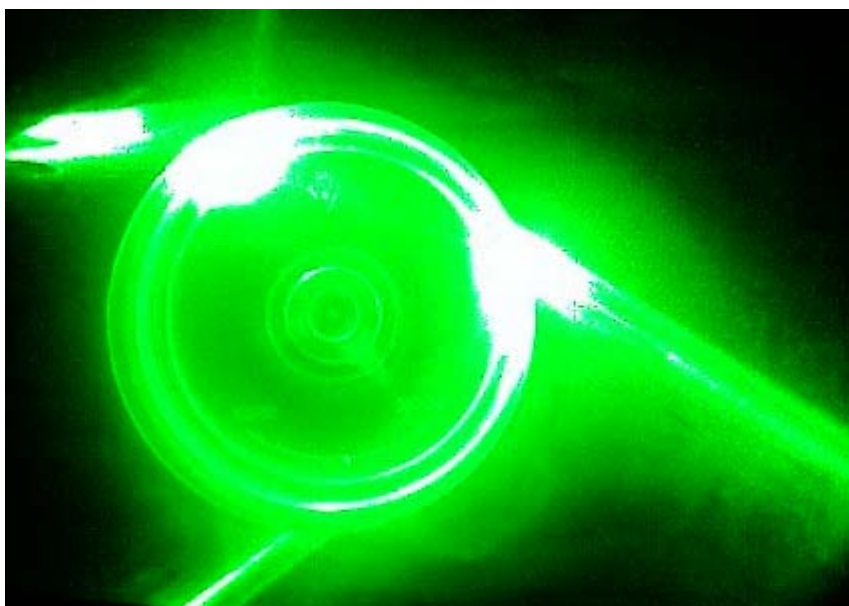


圖 4：以綠光雷射光束射入注入待測液體的圓柱桶狀容器

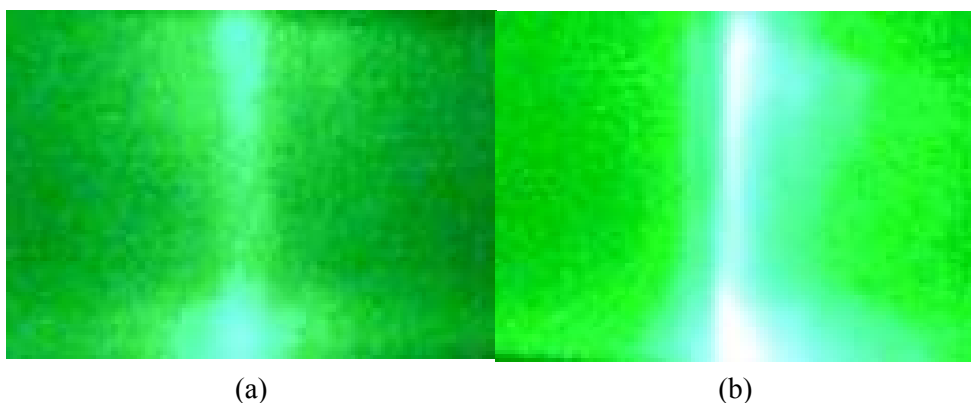


圖 5：(a)當 $\alpha$ 不是極大值時，從圓柱桶射出的光束較寬而亮度也較暗。  
(b)當 $\alpha$ 為極大值時，從圓柱桶射出的光束會形成一條極明亮的細光束。

時，從圓柱桶射出的光會形成一條極細的光束(如圖 5)，於是此時 $\alpha_{\max}$ 之值可以很精確測量出來，然後再將所量出的 $\alpha_{\max}$ 值利用表一查出此液體所相對應的折射率之值。

從實驗的測量中我們可以得到綠光雷射( $\lambda = 531\text{\AA}$ )相對於水的 $\alpha_{\max}$ 值為 $42^\circ$ ，所對應的折射率值為 1.333，而綠光雷射相對於飽和食鹽水的 $\alpha_{\max}$ 值為 $35^\circ$ ，所對應的折射率為

1.386，這比一般用司乃耳折射定律直接測量折射率的方法其精確度至少約提高一個數量級左右。

### 參、利用司乃耳折射定律解決變分法的問題

這一節的主要內容是利用司乃耳折射定

律(Snell's Law)來取代變分法複雜的數學技巧，用來解決積分的極值問題，如：光在緩變折射率介質中的行進軌跡、懸鏈線以及最速落徑問題等歷史上發生過的物理數學的難題。

(一) 光在緩變折射率介質中的行進軌跡

由費瑪原理我們知道光線必定循著最短時間的路徑行進，如果介質中的折射率為位置的函數，亦即  $n = n(x, y, z)$ ，則光線行進所花費的時間為

$$T = \int \frac{dl}{v} = \int \frac{n(x, y, z)}{c} dl \quad (5)$$

其中  $v$  為光在介質中行進的速度，而  $c$  為光在真空中行進的速度。若要求出光在此一緩變折射率介質中的行進軌跡，則正規的作法是必須對(5)式作變分取時間  $T$  的極小值 [2]，但是其中的數學技巧過於艱深，很難讓一般的中學生甚至大一的學生理解。基於上述的理由，我們建議利用司乃耳折射定律來避開變分法複雜的數學技巧，使得只要學過基礎微積分的學生都可以輕易的處理積分極值的問題。

為了使問題簡化，令緩變折射率介質的折射率  $n = n(x)$ ，我們可以將折射率介質分成許多薄層，每一薄層的折射率都是常數，由圖 6 中我們可以看出光線在每一薄層的行進的軌跡都滿足司乃耳折射定律，如此一來，我們就可以利用司乃耳折射定律來決定光線行進的軌跡。

由圖 6 中我們知道光線經過每一薄層的時間  $dT$  與折射率  $n$  的關係為

$$dT = \frac{dl}{v} = \frac{ndl}{c} \quad (6)$$

眾所皆知 Snell's 定律可以由費馬原理推導出，應用 Snell's 定律我們可以得知

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n(x) \sin \theta = C \quad (7)$$

其中  $n_0$  為空氣的折射率， $\theta_0$  為光線由空氣剛進入水中的入射角， $n(x)$  為介質在深度為  $x$  處的折射率， $\theta$  為介質在深度為  $x$  處的折射角， $C$  為一常數。由圖 6 可知

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \quad (8)$$

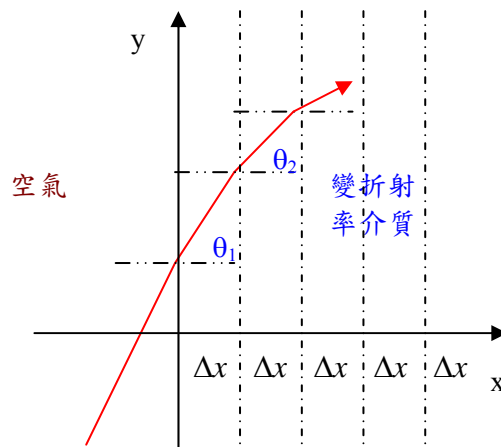


圖 6：光由空氣進入緩變折射率介質中的軌跡示意圖

將公式(7)帶入公式(8)可得到光的軌跡方程式

$$y(x) = \int \frac{C}{\sqrt{n^2(x) - C^2}} dx \quad (9)$$

因此，我們可以知道光束在進入緩變折射率介質後爲了滿足費馬原理，所以會造成折射而產生彎曲，藉由(9)式我們可以清楚得知光在介質中行進時的軌跡。

在實驗上我們將甘油緩緩注入裝水的水槽中，靜置一段時間後，讓甘油慢慢在水中擴散以形成緩變折射率介質液體，再讓一束雷射光通過此液體，如圖 7 所示。由圖 7 中我們可以看出，雷射光在此甘油與水的混合液體中的軌跡爲一正弦曲線。

依據擴散方程式可得甘油的濃度分佈爲 [3]：

$$N(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt} \quad (10)$$

此處  $k$  爲擴散係數。再者，我們又知道

在甘油和水的混合液中，甘油的濃度和此液體的折射率呈線性關係，故混合液之折射率分佈隨時間的變化關係可表示爲：

$$n(x,t) = \frac{A}{\sqrt{kt}} e^{-x^2/4kt} \quad (11)$$

此處  $A$  爲一常數。若  $x^2/4kt \ll 1$ ，則(11)式經泰勒展開式之結果爲：

$$n = n_b(t)(1 - a(t)x^2) \quad (12)$$

此處  $n_b(t) = A/\sqrt{kt}$ ， $a(t) = 1/4kt$ 。將(12)式代入(9)式中，經由積分計算的結果，可得光在甘油和水的混合液中的軌跡方程式爲：

$$x = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2a}} \sin\left(\frac{\sqrt{2a}}{\alpha} y\right) \quad (13)$$

此處  $\alpha = C/n_b$ 。

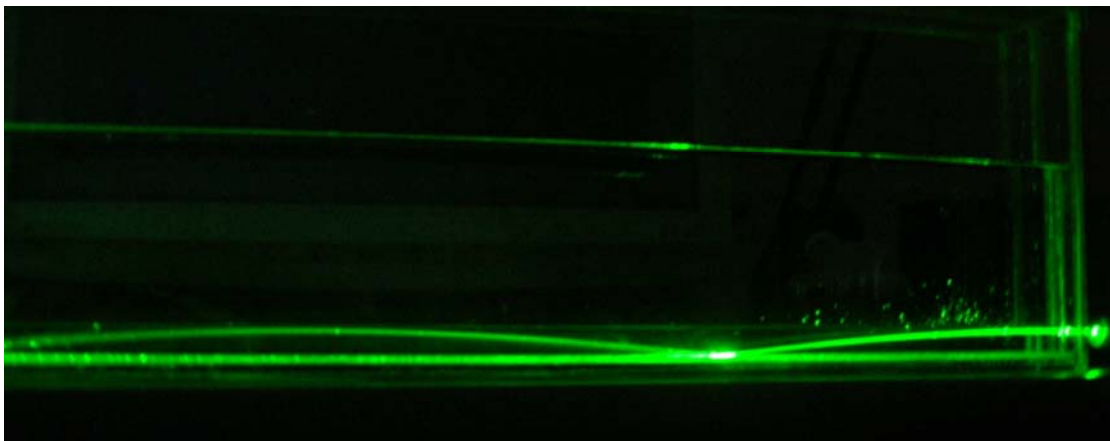


圖 7：雷射光在甘油混入水中擴散後的混合液之軌跡。



## (二) 懸鏈線與最速落徑問題

如果我們將一條鏈子的兩端固定讓它自然懸吊，最後就形成圖八的懸鏈線，令重力加速度為  $g$  而鏈子的質量密度為  $\rho$ ，則整條懸鏈線的位能為

$$U = \int \rho g x \, dl \quad (14)$$

而整個懸鏈線問題就是找出它的軌跡使得整個系統的位能為極小值；換言之，只要懸鏈線的軌跡遵守 Snell's 折射定律，自動就能讓(14)式的積分值為極小值。於是將(14)式與(5)式做比較，我們可以做出以下的類比：時間  $T \rightarrow$  位能  $U$ ，折射率  $n(x) \rightarrow$  高度  $x$ 。我們可以想像懸鏈線上每一小段的彎曲程度就有如圖 6 光線的彎曲一樣，它們都遵守 Snell's 折射定律，因此可以將懸鏈線的軌跡方程式寫為[4]

$$y(x) = \int \frac{C}{\sqrt{x^2 - C^2}} dx \quad (15)$$

將(15)式積分後得

$$x = A \cosh(y/C) \quad (16)$$

此處  $A$  為一常數，於是圖形為一雙曲餘弦函數。由以上的論述，我們可以這麼說造成積分值為極值的軌跡是由 Snell's 折射定律所決定，也就是說只要利用 Snell's 折射定律來決定積分值為極值的軌跡，就可以省去用複雜的變分法。

另外，處理最速落徑問題時，落下的時間  $T$  滿足以下方程式

$$T = \int \frac{dl}{v} = \int \frac{dl}{\sqrt{2gx}} \quad (17)$$

此處重力加速度為  $g$  而落下的高度為  $x$ 。同樣的將(17)式與(5)式做比較，我們可以做出以下的類比：折射率  $n(x) \rightarrow 1/\sqrt{x}$ 。於是，最速落徑的軌跡方程式為

$$y(x) = \int \frac{C}{\sqrt{1/x - C^2}} dx \quad (18)$$



圖 8：將一條鏈子自然懸吊所形成的懸鏈線

將(18)式積分後可得軌跡爲一擺線[5]。

因此根據以上的論述，我們可以得到一個結論：今後如果要處理積分的極值問題時，我們可以依以下步驟進行：例如有某一個物理量  $G$  滿足下列方程式

$$G = \int f(x) dl \quad (19)$$

這時我們可以根據司乃耳折射定律將(19)式與(5)式做比較並且做出以下的類比：時間  $T \rightarrow$  物理量  $G$ ，折射率  $n(x) \rightarrow$  函數  $f(x)$ 。於是讓物理量  $G$  爲極值的軌跡方程式即爲

$$y(x) = \int \frac{C}{\sqrt{f^2(x) - C^2}} dx \quad (20)$$

此處(20)式爲處理積分的極值問題時的一般通解，但這個方法只能用在函數  $f = f(x)$  的情形，若函數  $f = f(x, y, z)$  的情形則不適用。

## 肆、結語

在前面的幾個小節中我們利用司乃耳折射定律解釋彩虹形成的原因以及發展出更爲精確的一種測量折射率的新方法。另外，我們也利用司乃耳折射定律避開變分法複雜的數學技巧，成功的解決積分的極值問題。以上這些例子雖然在一些物理的專業參考書中都會論及，但是這些書籍所闡述的內容都過於艱深晦澀，很難讓學生了解其中非常深刻的物理內涵。現在這些物理現象經由作者重新透過新的看法與思路，將這些發生在日常生活中的物理現象看得更爲透徹，而且其原理分析起來也更爲簡單了，作者希望藉由這些分析方法的介紹，讓學生對於物理產生學習興趣，使得學習物理變得簡單容易多了。

## 參考文獻

1. J. B. Marion & S. T. Thornton, "Classical Dynamics" 4<sup>th</sup> ed. Harcourt Brace & Company, 1995, p.217.
2. John. David. Jackson, "Classical Electrodynamics 3<sup>rd</sup> ed." Chap.8, John Wiley & Sons. 1999.
3. Jon Mathews & R. L. Walker, "Mathematical Methods of Physics" 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley, p. 243.
4. M. L. Boas, "Mathematical Methods in the Physical Sciences" 2<sup>nd</sup> ed.. John Wiley & Sons, p.391.
5. R. Larson, R. P. Hostetler, & B. H. Edwards "Calculus 7<sup>th</sup> ed." Houghton Mifflin Comp. 2002.